7.11.19

משה

מבחן 80%
שעורים 20%

אינפי א'

$\mathbb{N}$ - מספרים טבעיים $\{1, 2, 3, \dots\}$. $n \in \mathbb{N}$ (מס' טבעי).

$\mathbb{Z}$ - מספרים שלמים $\{0, \pm1, \pm2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ - מספרים רציונליים $\mathbb{Q} = \{q = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$

$\mathbb{R}$ - מספרים ממשיים (כל המספרים על הציר)

!* יותר מספרים אי-רציונליים ממספרים רציונליים

<u>רציונליים:</u> כל שבר סופי (עשרוני) ממשי הוא רציונלי

כל שבר העשרוניים האינסופיים המחזוריים הם רציונליים.

<u>לדוגמא:</u>

$$x = 3.787878\dots \qquad - \quad 100x = 378.78\dots \qquad 99x = 375 \qquad x = \frac{375}{99}$$

$$x = 2.666\dots \qquad - \quad 10x = 26.666\dots \qquad 9x = 24 \qquad x = \frac{24}{9}$$

כל השברים האינסופיים <u>הלא</u> מחזוריים הם אי רציונליים.

לדוגמא: π, $\sqrt{2}$, e וכו'.

<u>הוכח</u> כי $\sqrt{2}$ הוא מס' אי רציונלי:

<u>הוכחה</u>

נניח ~~[illegible]~~ ש-$\sqrt{2}$ רציונלי, כלומר מתקיים ש- $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ שבר מצומצם.

מכן, $\sqrt{2}n = m$ $\Leftarrow$ $2n^2 = m^2$ $\Leftarrow$ ומכאן נובע ש m^2 מתחלק ב-2 $\Leftarrow$ m מתחלק ב-2

(כלומר, $\frac{m \cdot m}{2}$ וישאר $m \cdot$ מס' שלם). $\Leftarrow$ $m = 2 \cdot k$ $\Leftarrow$ $m^2 = 4k^2$

$\Leftarrow$ $2n^2 = 4k^2$ $\Leftarrow$ $n^2 = 2k^2$ $\Leftarrow$ n^2 מתחלק ב-2 $\Leftarrow$ n מתחלק ב-2 $\Leftarrow$ $n = 2L$

קיבלנו, ש $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ $\Leftarrow$ $\sqrt{2} = \frac{2k}{2L}$, כלומר $\frac{m}{n}$ לא שבר מצומצם ולכן סתירה,

ולכן $\sqrt{2}$ אי רציונלי.

משפט

הקבוצה A תקרא **חסומה מלמעלה** (מלעיל) אם קיים m כך שלכל $x\in A$ מתקיים $x\le m$.

לדוגמא:

$A=\{7,-5,13,\sqrt{10},101\}$, $m=103$.

הקבוצה A תקרא **חסומה מלמטה** (מלרע) אם קיים m כך שלכל $x\in A$ מתקיים $x\ge m$.

הקבוצה A תקרא קבוצה חסומה אם קיים m, $m>0$, כך שלכל $x\in A$ מתקיים $|x|\le m$.

* הערה

$|x|\le m \Rightarrow -m\le x\le m$. אז $|x|\le 5 \Rightarrow -5\le x\le 5$.

אז גם $\{2\le x\le 8\} \Leftarrow |x|\le 8$

סופרמום (חסם עליון): החסם הקטן ביותר מבין החסמים מלמעלה.

אינפימום (חסם תחתון): החסם הגדול ביותר מבין החסמים מלמטה.

אם הסופרמום שייך לקבוצה הוא יקרא **מקסימום**.

אם האינפימום שייך לקבוצה הוא יקרא **מינימום**.

לדוגמא: $\{2<x\le 8\}$

$max=8$. סופרמום $=8$.

אין מינימום. אינפימום $=2$.

משפט

- לכל קבוצת מספרים ממשיים חסומה יש בהכרח סופרמום ואינפימום.
- לכל קבוצת מספרים ממשיים חסומה מלמעלה יש בהכרח סופרמום.
- לכל קבוצת מספרים ממשיים חסומה מלמטה יש בהכרח אינפימום.

דוגמאות:

הערה: לרב:
n טבעי
x ממשי

1) נתונה הקבוצה A $\quad A=\{x<7 \mid x\in\mathbb{R}\}$

הוכח כי 7 הוא הסופרמום.

הוכחה

נניח בשלילה ש-7 לא סופרמום. נניח m הוא סופרמום ולכן $m<7$.

נסתכל על המספר $\frac{m+7}{2}$. מצד אחד, $\frac{m+7}{2}<\frac{7+7}{2}=7$ כלומר $\frac{m+7}{2}<7$ ולכן שייך ל-A. מצד שני $\frac{m+7}{2}>\frac{m+m}{2}=m$ כלומר $\frac{m+7}{2}>m$. קיבלנו איבר ששייך לקבוצה (מצד אחד) אבל לא חסום ע"י הסופרמום (מצד שני).

ולכן סתירה, ולכן 7 סופרמום.

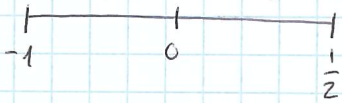
2) $A = \{x = \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

1 - מקסימום (+סופרימום).

0 - אינפימום.

3) $A = \{x = \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\}$



$\frac{1}{2}$ - מקסימום

(-1) - מינימום

4) $A = \{x = \frac{3n+4}{2n+3} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\{\frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{13}{9}, \frac{16}{11}, \dots\}$

$\frac{7}{5}$ - מינימום

1.5 - סופרימום. (אסימפטוטה אופקית, $1.5 = \frac{3}{2}$).

5) $A = \{x = (-1)^n + \frac{2n-1}{2n+2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\{-1+\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, -1+\frac{5}{8}, 1\frac{7}{10}, \dots\}$

$-\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}, \frac{17}{10}, -\frac{3}{12}, \frac{25}{14}$

$-\frac{3}{4} \longleftarrow \qquad \longrightarrow 2$

2 - ~~[illegible]~~ סופרמום

מינימום - $(-\frac{3}{4})$.

6) $A = \{x \mid x^2 - 5x - 6 < 0\}$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 7}{2} = 6, -1$

$-1 < x < 6$

אינפימום - (-1)

6 - סופרמום

7) $A = \{x \mid x^2 + 7x - 8 \geq 0\}$

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{2} = \frac{-7 \pm 9}{2} = 1, -8$

ולכן, לא חסומה.

$x \leq -8, \ x \geq 1$

$\{x \geq 1$ או $x \leq -8\}$

אינפי א'

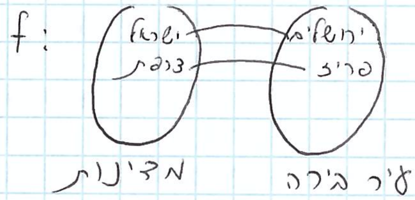
14.11.19

פונקציה

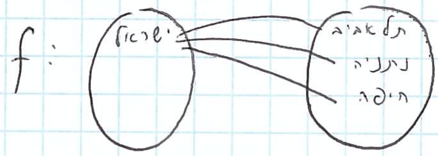
הגדרה

לכל איבר בתחום יש איבר אחד בטווח.

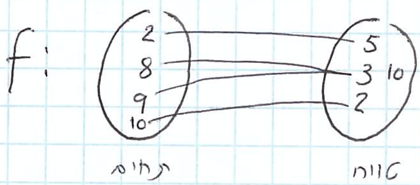
לדוגמא:



לכל מדינה עיר בירה אחת ולכן פונקציה.

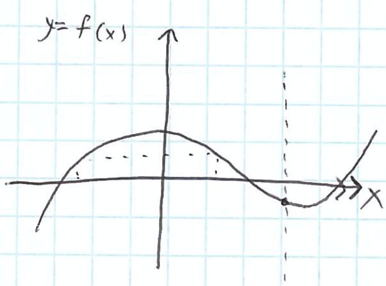


לא פונקציה! לאיבר ישראל יש יותר מאיבר אחד בטווח.

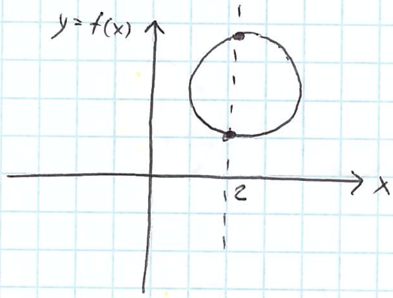


$f(2)=5$
$f(8)=3$
$f(9)=3$
$f(10)=2$

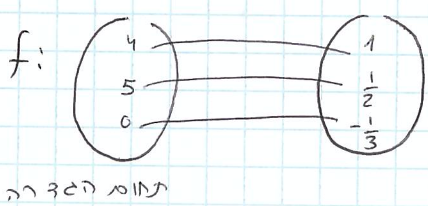
זאת פונקציה. לאיבר בטווח יכול להיות יותר מאיבר אחד בתחום, כל עוד לכל איבר בתחום יש איבר אחד בטווח. בנוסף, האיבר החופשי 10 בטווח לא סותר את ההגדרה.



כל x מקבל $f(x)$ אחד, ולכן פונקציה



לא פונקציה, קיים שני $f(x)$ ל $x=2$.



זאת פונקציה

$$f(x)=\frac{1}{x-3}$$

ת"ה

$\mathbb{R}-\{3\}$, או, $x\neq3$

תחום הגדרה

הגדרה

התחום הגדול ביותר שבו מתקיימת הפונקציה.

בתה יש לנו 3 בעיות:

א) אסור 0 במכנה. (אסור אפס במכנה)

ב) בתוך שורש זוגי הביטוי צריך להיות גדול או שווה לאפס.

ג) בתוך log (או ln) הביטוי גדול מאפס.

דוגמאות

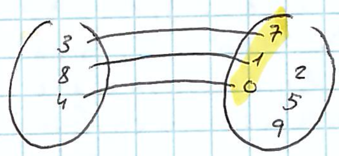
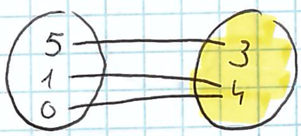
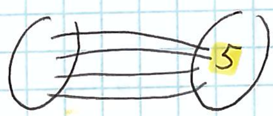
- $y=\sqrt{x}$, ת"ה: $x\ge 0$
- $y=\sqrt[3]{x}$, ת"ה: כל x
- $y=\sqrt{2x-5}$, ת"ה: $x\ge 2.5$ $\qquad 2x-5\ge 0 \longrightarrow x\ge 2.5$
- $y=\sqrt{3x-12}+\frac{1}{\sqrt{8-x}}$, ת"ה: $4\le x<8 \longleftarrow x\ge 4,\ x<8 \longleftarrow 8-x>0$ וגם $3x-12\ge 0$
- $y=\ln x \ (\Leftarrow \ln x=\log_e x)$ ת"ה $x>0$
- $y=\ln(5-x)$ ת"ה: $5-x>0 \longrightarrow x<5$

תמונה של פונקציה

הגדרה

חלק מהטווח שיש לו מקור בתחום.

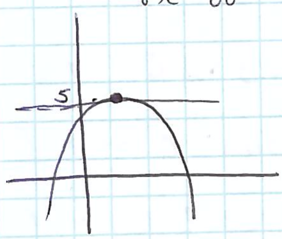
דוגמאות:

- $f:$  התמונה יכולה להיות חלק מהטווח
- $f:$  התמונה יכולה להיות כל הטווח
- $f(x)=5$ $\quad f:$  התמונה היא $\{5\}$, איבר אחד וגם כל הטווח.

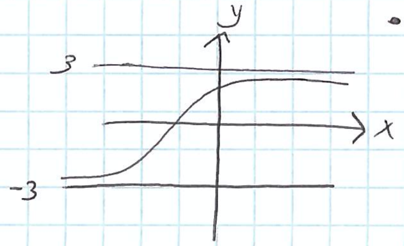
* פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ התחום, והטווח הם $\mathbb{R}$)

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-7$ התמונה היא הטווח
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$  התמונה היא $y\ge 0$

לפי גרף



- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-2x^2$ התמונה $y\le 5$
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7+3x^2$ התמונה היא $y\ge 7$



התמונה היא $-3 \le x \le 3$

תזכורת

$-1 \le \sin x \le 1$

$-1 \le \cos x \le 1$

$0 \le \sin^2 x \le 1$

$0 \le \cos^2 x \le 1$

$f(x) = 7 + 2\sin(3x)$

הכי גבוהה זה 1
הכי נמוך זה -1

$5 \le 7 + 2\sin(3x) \le 9$

$f(x) = \dfrac{10}{7 - 3\sin(9x)}$

$-1 \le z \le 1$

$1 = \dfrac{10}{7+3} \le y \le \dfrac{10}{7-3} = \dfrac{10}{4} = 2.5$

$y = \dfrac{9}{6 - 2\cos^2 x}$

$1.5 = \dfrac{9}{6} \le y \le \dfrac{9}{4} = 2.25$

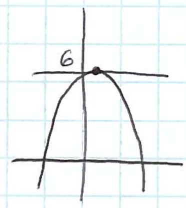
* תמונה צריכה להיות מדוייקת, בשונה מחסמים של פונקציה.

פונקציה חסומה

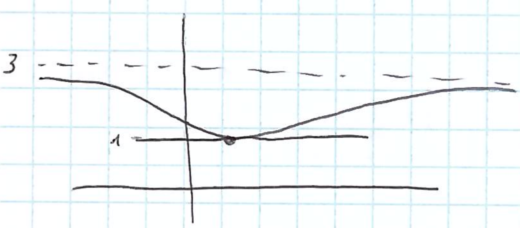
הגדרה

היא פונקציה שהתמונה שלה חסומה.

דוגמא



6 הוא מקסימום
ולכן הפונקציה
חסומה מלמעלה



תמונה $\boxed{1 \le y < 3}$ (כלומר חסומה).

כאשר 1 היא מינימום
3 הוא סופרמום.

* כדי להראות שפונקציה חסומה, נראה שהתמונה שלה חסומה.

כנ"ל על חסומה מלמעלה/מלמטה.

הראו שהפונקציה חסומה:

$$f(x)=\frac{3x}{x^2+7}$$

ת"ה כל x.

* ככל שה x גדל המכנה גדל יותר מהמונה ולכן ישאף ל-0.

נבחר ה-8 באופן שרירותי.

$$\left|\frac{3x}{x^2+7}\right|\le 8$$

$$\frac{3x}{x^2+7}\le 8$$

$$3x\le 8x^2+56$$

$$0\le 8x^2-3x+56$$

מתקיים לכל x

$$8\le\frac{3x}{x^2+7}$$

$$-8x^2-56\le 3x$$

$$0\le 8x^2+3x+56$$

מתקיים לכל x

לכן, קיים $M=8$ אשר מקיים $\left|\frac{3x}{x^2+7}\right|\le 8$ ולכן לפי הגדרת חסימות הפונקציה חסומה. (לא ביקשו סופרמום/אינפימום).

הראו שהפונקציה חסומה בתחום הבא:

$$f(x)=\frac{2x-4}{x-7}$$

תחום: $x\ge 9$

1) נחלץ את x:

$$y=\frac{2x-4}{x-7}$$

$$xy-7y=2x-4$$

$$xy-2x=7y-4$$

$$x(y-2)=7y-4$$

$$\boxed{x=\frac{7y-4}{y-2}}$$

2) נראה ~~[illegible]~~ (כלומר $x\ge 9$) האם יש בתחום שקיבלנו חסמים:

$$x=\frac{7y-4}{y-2}\ge 9$$

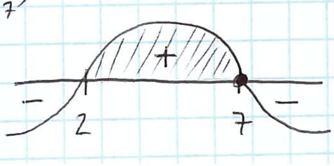
$$\frac{7y-4}{y-2}-9\ge 0$$

$$\frac{7y-4-9y+18}{y-2}\ge 0$$

$$\frac{14-2y}{y-2}\ge 0$$

$14-2y=0$
$14=2y$
$y=7$

$y-2=0$
$x=2$



(שיטת הנחש)

3) ולכן, $\boxed{2<y\le 7}$ (=תמונה)

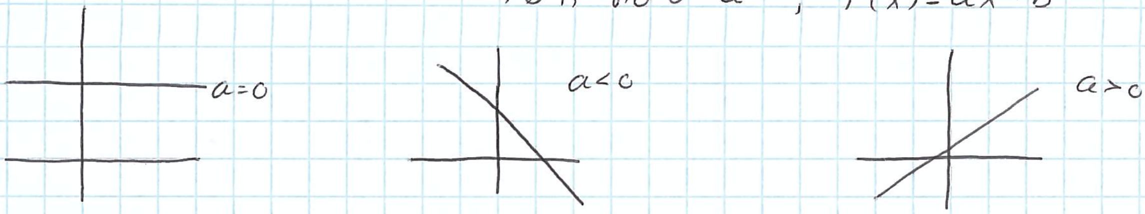
הפונקציה חסומה בתחום $x\ge 9$.

(כל x שנציב יהיה בין 2 ל-7)

פונקציות אלמנטריות

הפונקציה הקווית

$f(x)=ax+b$, a שיפוע הישר

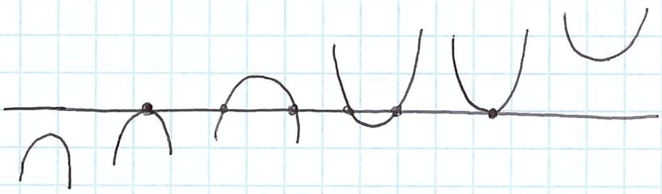


הפונקציה הריבועית

$f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$

$a>0$ ∪ (צוחקת)

$a<0$ ∩ (בוכה)



פולינום

$$P(x)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_1X+a_0$$

דוגמאות

$P(x)=3x^2-7x+2$ דרגה 2

$P(x)=7x^5-3x^2+9x$ דרגה 5

$P(x)=16-9x^8+4x-5$ דרגה 8

$P(x)=3x-7$ דרגה 1

$P(x)=2$ דרגה 0

דרגת פולינום

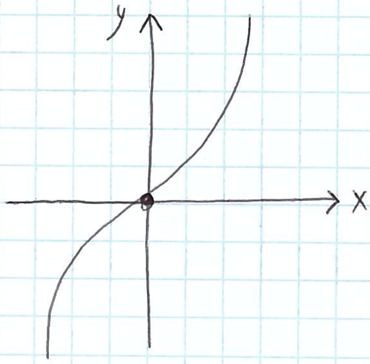
הגדרה

החזקה הגבוהה ביותר של הפולינום.

* פונקציה קווית היא פולינום מדרגה 1 או 0.

פונקציה ריבועית היא פולינום מדרגה 2, 1 או 0.

$f(x)=X^3$ מדרגה 3.



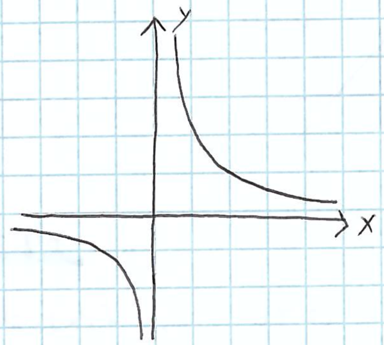
הפונקציה הרציונלית

$$f(x)=\frac{\text{פולינום}}{\text{פולינום}}$$

(פולינום הוא גם פונקציה רציונלית $f(x)=\frac{\text{פולינום}}{1}$)

<u>דוגמא</u>

• $f(x)=\frac{5x-x^2}{x^3+7}$ • $f(x)=\frac{1}{x}$

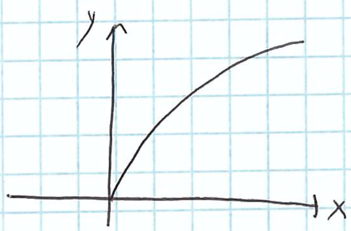


פונקציה אי רציונלית

$$f(x)=\sqrt[n]{\text{פונקציה רציונלית}}$$

<u>דוגמא</u>

$f(x)=\sqrt{x}$



פונקציה מעריכית והפונקציה הלוגריתמית

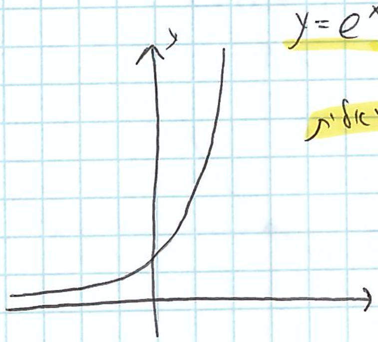
$y=a^x$, $a\geq 0$, $a\neq 1$

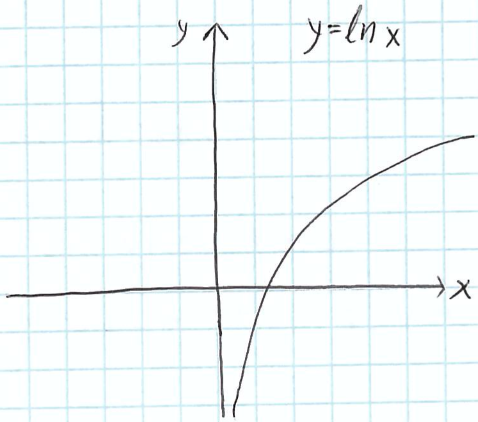
$y=\log_e x=\ln x$

<u>דוגמאות:</u>

$y=e^x$

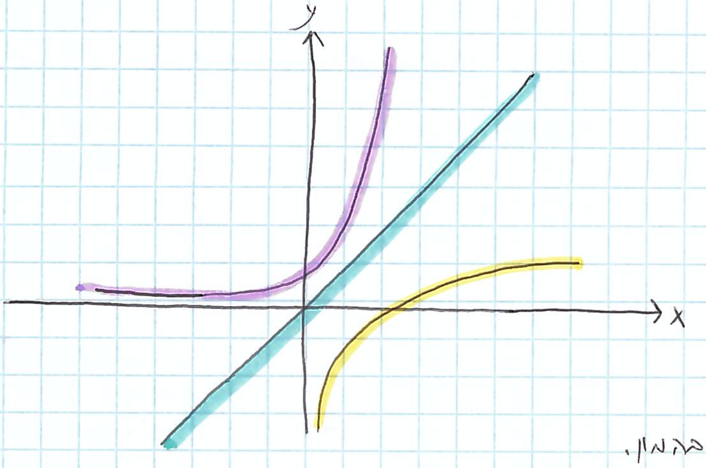
הפונקציה אקספוננציאלית





הבדלי גדילת ערך ה-y

log x	x	10^x
0	1	10^1
1	10	10^{10}
2	100	10^{100}



* אקספוננציאלית גדלה מהר מאוד בהמון.

פונקציה מפוצלת

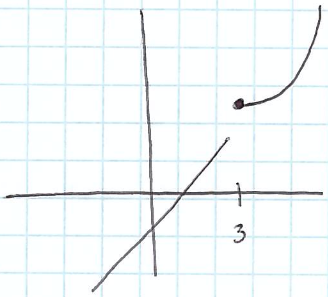
לא אלמנטרית!

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 3 \\ 2x+1 & x<3 \end{cases}$$

$f(5)=25$

$f(3)=9$

$f(2)=5$



אמ:

$$\begin{cases} x^2 & x\geq 3 \\ 2x+3 & x\leq 3 \end{cases}$$

$f(3)=9$

זאת פונקציה אופל.

אם:

$$\begin{cases} x^2 & x\geq 3 \\ 2x+1 & x\leq 3 \end{cases}$$

$f(3)=9$

$f(3)=7$

לא פונקציה

פונקציה זוגית

צריכה לקיים את התנאים:

א) תחום הגדרה סימטרי

ב) $f(-x)=f(x)$

פונקציה אי זוגי

צריכה לקיים את התנאים:

א) תחום הגדרה סימטרי

ב) $f(-x)=-f(x)$

תחום הגדרה סימטרי

אם פונקציה לא מוגדרת בנק' a אז צריכה להיות לא מוגדרת ב -a.

(מה יוצא מזה הוא 0).

$\frac{2}{x^2-9}$ ת"ה $x\neq\pm3$ סימטרי , $\frac{8}{x-2}$ ת"ה $x=2$ לא סימטרי

* הסבר לסעיף ב' בזוגי

$f(x)=x^4$

$f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$

$f(x)=x^4$, מזוגי , $f(x)=\cos x$

* הסבר לסעיף ב' באי זוגית

$f(x)^n$, n אי זוגי, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\tan x$

$f(x)=x^3$

$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$

בדיקת זוגיות

- $f(x)=\frac{8x}{x^2-4}$ ת"ה $x\neq\pm2$

$$f(-x)=\frac{8(-x)}{(-x)^2-4}=\frac{-8x}{x^2-4}=-\frac{8x}{x^2-4}=-f(x)$$

ולכן, אי זוגית.

- $f(x)=x^2-4x+8$

$$f(-x)=(-x)^2-4(-x)+8=x^2+4x+8$$

הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.

פונקציה כללית

פונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.

דוגמאות:

- $f(x)=\frac{2x^8-7x^7+9x^3-4}{(x-2)(x+3)}$

ת"ה לא סימטרי, ולכן פונקציה כללית.

- $f(x)=\underbrace{(x^2-5x+2)^2}_{a}-\underbrace{(x^2+5x+2)^2}_{b}$ ת"ה כל x.

$$f(-x)=((-x)^2-5(-x)+2)^2-((-x)^2+5(-x)+2)^2=(x^2+5x+2)^2-(x^2-5x+2)^2=$$

$$=-((x^2-5x+2)^2-(x^2+5x+2)^2)=-f(x)$$

$-(a-b)=b-a$

ולכן, אי זוגית.

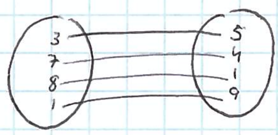
21.11.19

אינפי אז'

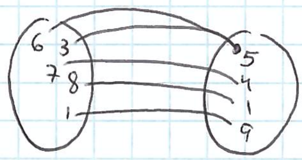
פונקציה חד חד ערכית

הגדרה

לכל $f(x_1) = f(x_2)$ מתקיים בהכרח $x_1 = x_2$

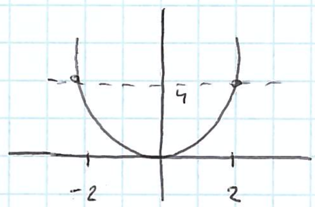


$f:$ חח"ע



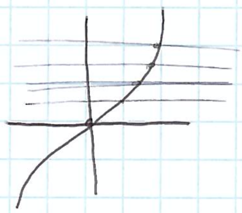
$f:$ לא חח"ע כי $f(6)=5=f(3)$
אבל
$6 \neq 3$

$x^2 = f(x)$



$f(-2)=4=f(2)$
אבל
$-2 \neq 2$

$f(x) = x^3$



חח"ע

בשביל להוכיח שפונקציה לא חח"ע מספיק להראות דוגמא אחת שבה זה לא מתקיים.

כדי להוכיח שזה כן חח"ע צריך להראות שזה מתקיים לכל x.

לדוגמא

- $f(x) = 2x - 7$

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$2x_1 - \cancel{7} = 2x_2 - \cancel{7} \quad /:2$$
$$x_1 = x_2$$

הוכחנו שהפונקציה חח"ע.

- $f(x) = x^2 + 3$

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$x_1^2 + \cancel{3} = x_2^2 + \cancel{3}$$
$$x_1 = \pm x_2 \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

או

$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$
$$x_1 = x_2 \qquad x_1 = -x_2$$

לא חח"ע

$$f(8) = f(-8)$$
$$8 \neq -8$$

$$f(x)=\frac{3x-7}{2x+1}$$

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$\frac{3x_1-7}{2x_1+1}=\frac{3x_2-7}{2x_2+1}$$

$$6\cancel{x_1x_2}+3x_1-14x_2-\cancel{7}=6\cancel{x_1x_2}+3x_2-14x_1-\cancel{7}$$

$$3x_1+14x_1=3x_2+14x_2$$

$$17x_1=17x_2$$

$x_1=x_2$ חח"ע.

$$f(x)=\frac{5x}{x^2+2}-8$$

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$\frac{\cancel{5}x_1}{x_1^2+2}-\cancel{8}=\frac{\cancel{5}x_2}{x_2^2+2}-\cancel{8}$$

$$\frac{x_1}{x_1^2+2}=\frac{x_2}{x_2^2+2}$$

$$x_1x_2^2+2x_1=x_2x_1^2+2x_2$$

$$x_1x_2^2-x_2x_1^2+2x_1-2x_2=0$$

לא חח"ע $\quad x_1x_2(x_2-x_1)-2(-x_1+x_2)=0$

$$(x_2-x_1)(x_1x_2-2)=0$$

$x_1=x_2 \qquad x_1\cdot x_2=2$

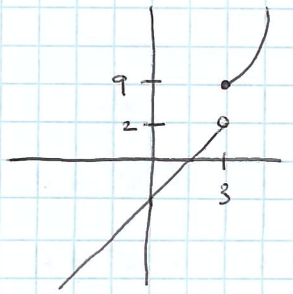
$$x_1=\frac{2}{x_2}$$

$$x_2=7 \quad x_1=\frac{2}{7}$$

$$f(7)=f(\tfrac{2}{7})$$

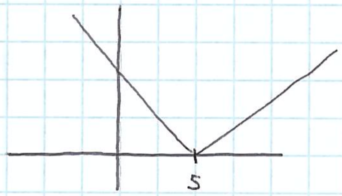
$$f(7)=-\frac{373}{51}=f(\tfrac{2}{7})$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 3 \\ 2x-4 & x<3 \end{cases}$$



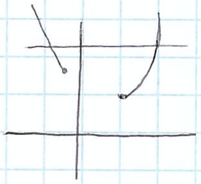
חח"ע

$$f(x)=|x-5|$$



לא חח"ע

$f(8)=3=f(2)$



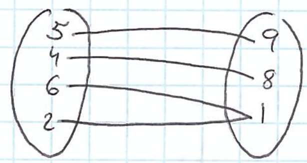
לא חח"ע

פונקציית על

<u>הגדרה</u>

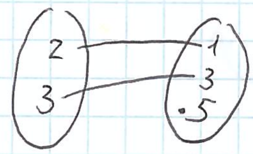
לכל איבר בטווח יש מקור בתחום. כלומר, הטווח זה התמונה.

$f:$



לא חח"ע
אבל על

$f:$



פונקציה אבל
לא על

$$f(x)=|x-5|$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לא על (אין דרך להגיע לשליליים)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ כן על

<u>הערה</u>

אם פונקציה היא חח"ע ועל אז יש לה פונקציה הפוכה.

פונקציה הפוכה

<u>הגדרה</u>

מציבים איברים מהטווח ומקבלים איברים בתחום. מסמנים f^{-1}.

<u>דוגמא</u>

$f(x)=x^2$ לא על ולא חח"ע

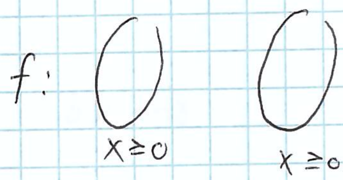
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=x^2$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לא חח"ע ולא על

$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ חח"ע אבל לא על (לא מקבלים שליליים)

$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ חח"ע ועל

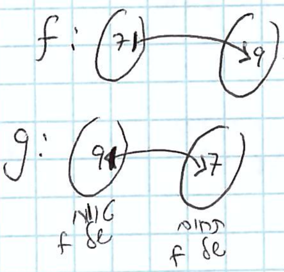


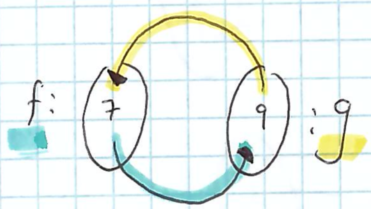
אז הפונקציה ההפוכה היא:

$y=x^2$

$g(x)=\sqrt{x} \Leftarrow x=\sqrt{y}$

$g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$





$f(x)=2x-5$

$y=2x-5$

$2x=y+5$

$x=\frac{y+5}{2}$

$$\boxed{g(x)=\frac{x+5}{2}}$$

תרגיל

מצאו את הפונקציה ההפוכה:

$f(x)=\frac{2x-7}{x-5}$

$f:\mathbb{R}-\{5\}\to\mathbb{R}\{2\}$

$x\neq 5 \qquad y=2$

$yx-5y=2x-7$

$yx-2x=-7+5y$

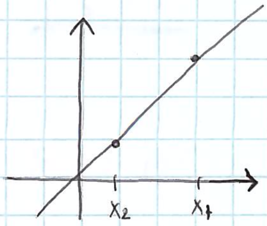
$x(y-2)=5y-7$

$x=\frac{5y-7}{y-2}$

$g(x)=\frac{5x-7}{}$

פונקציה מונוטונית עולה

הגדרה



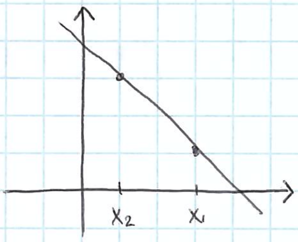
לכל $x_1 > x_2$ מתקיים בהכרח $f(x_1) \geq f(x_2)$

פונקציה מונוטונית עולה ממש:

לכל $x_1 > x_2$ מתקיים בהכרח $f(x_1) > f(x_2)$.

פונקציה מונוטונית יורדת

הגדרה



לכל $x_1 > x_2$ מתקיים בהכרח $f(x_1) \leq f(x_2)$

פונקציה מונוטונית יורדת ממש:

לכל $x_1 > x_2$ מתקיים בהכרח $f(x_1) < f(x_2)$

דוגמא (הוכחה למונוטוניות).

$$f(x) = \frac{5x-3}{x-7} \qquad x \geq 10$$

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$\frac{5x_1-3}{x_1-7} > \frac{5x_2-3}{x_2-7}$$ (בגלל תחום אפשר כפל בהצלבה).

$$\cancel{5x_1x_2} - 35x_1 - 3x_2 + \cancel{21} > \cancel{5x_1x_2} - 35x_2 - 3x_1 + \cancel{21}$$

$$-32x_1 > -32x_2$$

$x_1 < x_2$ מונוטונית יורדת.

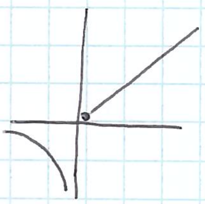
$$(f(x_1) > f(x_2))$$

משפט

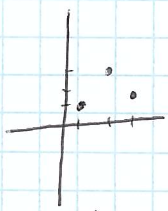
פונקציה עולה/יורדת ממש היא בהכרח חח"ע

ההפך לא בהכרח נכון!

אם היא חח"ע ורציפה היא בהכרח עולה/יורדת ממש.



חח"ע ולא מונוטונית



חח"ע ולא מונוטונית.

פונקציה ערך השלם

הגדרה

$$f(x)=[x]$$

לוקחים למס' את הערך השלם שלו בעיגול כלפי מטה. נקרא פונקציית מדרגות.

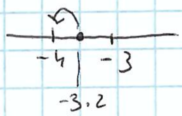
לוקחים את החלק שהוא שלם ומורידים את השארית.

$f(x)=[2.4]=2$

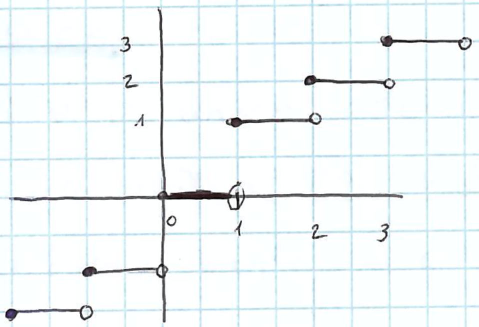
$f(x)=[2.1]=2$

$f(x)=[2.99]=2$

$f(x)=[4]=4$



$f(x)=[-3.2]=-4$



פונקציה עולה.

פונקציה מחזורית

הגדרה

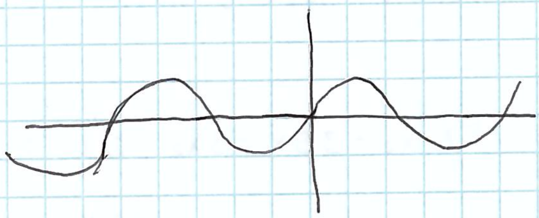
$f(x+T)=f(x)$ כאשר T זה גודל המחזור.

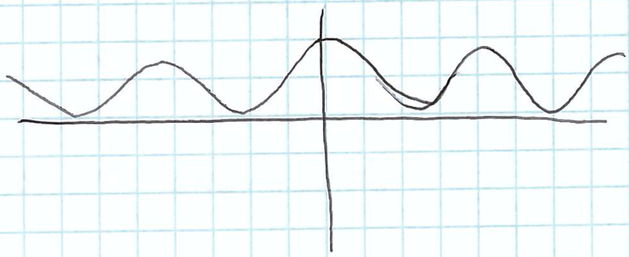
לדוגמא

$2\pi \to 360$

$\sin x=\sin(x+2\pi)$

פונקציה מחזורית





$f(x)=\cos^2 x$

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

מחזורי

$f(x)=\sin x$

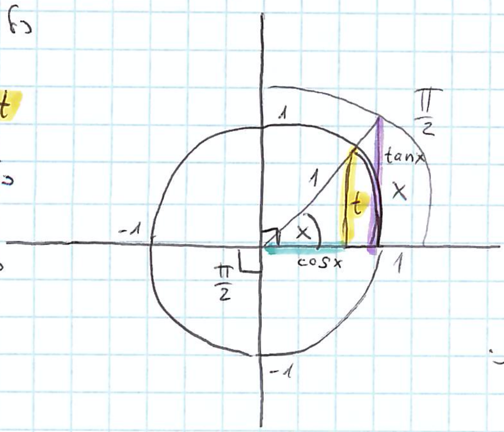
הסבר קצר לרדיאן

מעגל היחידה
היקף 2π

$360 - 2\pi \cdot R$ ← רדיאן.
גלגלנו.

הזווית זה גם אורך הקשת.

משתמשים ברדיאנים.



כל הקווים האנכיים הם sinx

$\sin x = \frac{t}{1} = t$

כל הקווים האופקיים הם cosx

כל הקווים החיצוניים הם tanx

מעבר בין מעלות לרדיאנים

$180 - \pi$

$\alpha^\circ - x$

$x = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180}$

$\alpha^\circ = \frac{180x}{\pi}$

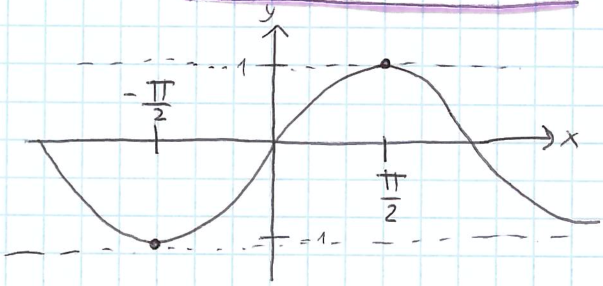
לדוגמא:

30°

1) $x = \frac{30^\circ \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$

2) $x = \frac{\pi}{4} \rightarrow \alpha = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{4}}{\pi} = 45$

הופכית ל $\sin x$

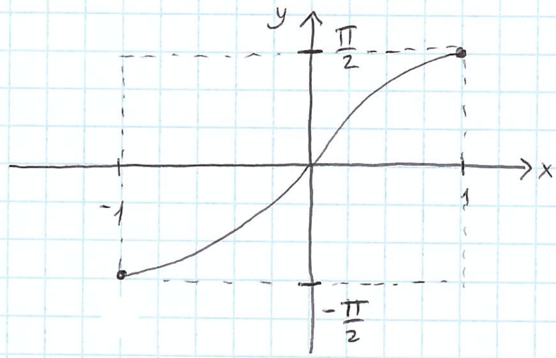


בתחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

הפונקציה sinx היא תח"ע עולה מונוטונית,
ולכן יש לה הופכית.

$f(x) = \sin x$

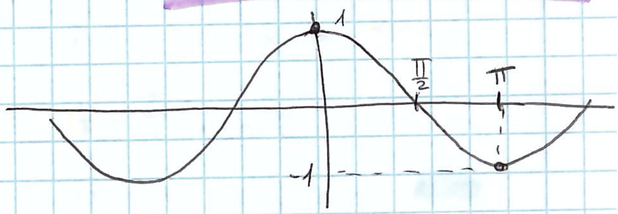
$f(x)^{-1} = g(x) = \arcsin x$



הופכית ל $\cos x$

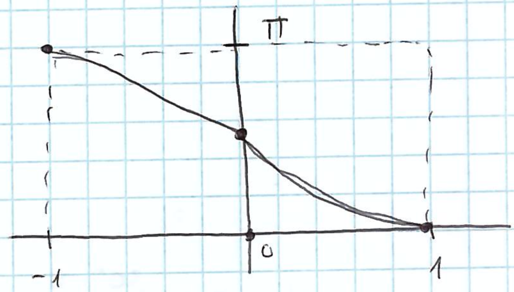
בתחום $0 \le \cos x \le \pi$

הפונקציה חח"ע ויש לה הפוכה.



$f(x) = \cos x$

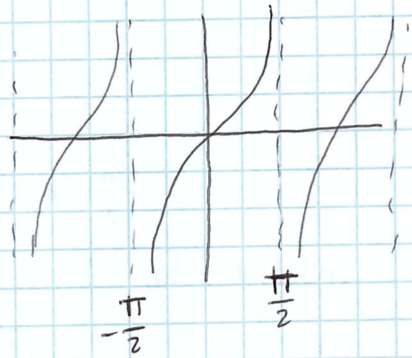
$f(x)^{-1} = g(x) = \arccos x$



הופכית ל $\tan x$

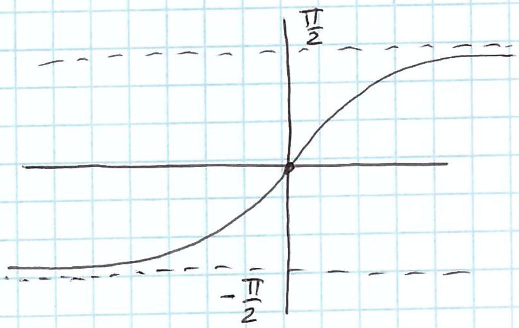
בתחום $-\frac{\pi}{2} \le \tan x \le \frac{\pi}{2}$

הפונקציה חח"ע ויש לה הפוכה.



$f(x) = \tan x$

$g(x) = \arctan x$



28.11.19

אינפי א׳

פונקציות

שולחים מספר מ- n ל- $\mathbb{R}$. כאשר n אצלנו יהיה אינסופי.

כאשר איבר כללי מסומן a_n.

דוגמאות לסדרות

$a_n=\frac{1}{n}$, $\{\overset{n=1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$

$a=\frac{1}{n^2}$ $\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16} \dots$

$a=2n+3$ $\{5, 7, 9, 11 \dots$

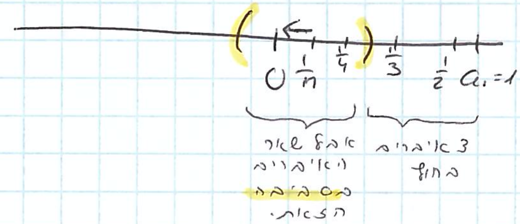
$a=\frac{1}{3^n}$ $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^3} \dots$

$a=(-1)^n$ $\{-1, 1, -1, 1 \dots$

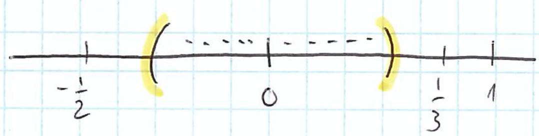
* אותנו מעניין אם הסדרה מונוטונית, חסומות ויש להן גבול.

גבול של סדרה

$a_n=\frac{1}{n}$, אנחנו טוענים שהגבול הוא 0.



$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$



הערה

אם לסדרה יש גבול, הוא יחיד. לכל סדרה יש גבול אחד.

הגדרת הגבול

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ כאשר L הוא הגבול.

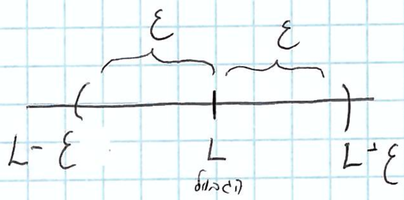
לכל $\varepsilon>0$ קיים $N>0$ $(N(\varepsilon))$ כך שלכל $N<n$ מתקיים

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

הסבר

ε זה סוג של רדיוס (לרב מס' קטן)

$$|a_n - L| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$
$$L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$$



N- מיקום בסדרה.
(לדוגמא $N=17$ אז a_{18} כבר בתוך הסביבה הצרה).

דוגמא להוכחת גבול

הוכח

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n+8} = \frac{2}{3}$$

$$|a_n - L| = \left|\frac{2n+5}{3n+8} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6n+15-6n-16}{9n+24}\right| = \left|\frac{1}{9n+24}\right| \underset{n>0}{=} \frac{1}{9n+24} \underset{\text{הקטנת מכנה הגדלת ביטוי}}{<} \boxed{\frac{1}{9n} \underset{\text{נדרוש}}{<} \varepsilon}$$

* $n>0$, $\varepsilon>0$ לכן סימן אי"ש לא משתנה

$$\boxed{\frac{1}{9\varepsilon} < n} \quad , \quad N = \left[\frac{1}{9\varepsilon}\right] + 1$$

לקחנו מס' קצת יותר גדול ליתר ביטחון.

אז עבור $n > \left[\frac{1}{9\varepsilon}\right]+1$ יתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

לדוגמא: $\varepsilon = 0.01$ אז $N = \left[\frac{1}{9\cdot 0.01}\right]+1 = 12$, ולכן מתקיים:

$$a_{13} = \underbrace{\left|\frac{2\cdot13+5}{3\cdot13+8} - \frac{2}{3}\right|}_{0.007} < 0.01$$

חוקים

- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\quad \left(\frac{1}{\infty} \to 0\right)$ מס' סופי כלשהו

החזקה הגבוהה היא הדומיננטית
אז
$3n^2 - 7n + 2 \to \infty$

דוגמאות

גבולות מהצורה $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

א) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-5}{5n^2+9n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}-\frac{5}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{9n}{n^2}-\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{5+\frac{9}{n}-\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

חילוק בחזקה הגבוהה של המכנה

ב) $$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+4n}{6n^3+7n^2-9} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{n}+\frac{4}{n^2}}{6+\frac{7}{n}-\frac{9}{n^3}} = \frac{0}{6} = 0$$

ג) $$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3-9}{2n^2-4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n-\frac{9}{n^2}}{2-\frac{4}{n}} = \infty$$

$\left(\text{אם היה:} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n}{-2} = -\infty \right)$

כללים

כאשר יש לנו ביטוי מהצורה $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ אנו מחלקים בחזקה הגבוהה של המכנה.

יש לנו 3 מקרים:

- אם החזקה הגבוהה נמצאת במונה ובמכנה, הגבול יהיה מנת המקדמים של החזקות הגבוהות. (דוגמא א')
- אם החזקה הגבוהה נמצאת במכנה, הגבול יהיה 0. (דוגמא ב')
- אם החזקה הגבוהה נמצאת במונה, הגבול יהיה $\pm\infty$ (דוגמא ג')

תזכורת

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad \sqrt{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3, \quad \sqrt[3]{a^{15}} = a^5$$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+4n^4+11n^5-18}{\sqrt{9n^{10}+4n^9-1}+13n^5-9n} = \frac{11}{\sqrt{9}+13} = \frac{11}{16}$$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{11n^5}{\sqrt{9n^{11}}+13n^5} = 0$$

<u>הכפלה בצמוד</u>

$(a-b)\underbrace{(a+b)}_{\text{הצמוד.}} = a^2-b^2$

$(a+b)\underbrace{(a-b)}_{\text{הצמוד}} = a^2-b^2$

- $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{a-b}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\overset{a+b}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{\underset{a+b}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}} =$$

הכפלה בצמוד

(צריך גם לחלק בו כדי לא לשנות את הערך של הביטוי)

<u>מהצורה</u> $(\infty-\infty)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

חזקה גבוהה במכנה.

- $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-7}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-7})(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-7})}{(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-7})} =$$

הכפלה בצמוד.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-n^2+7}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+7}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-7}} = \frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

$\sqrt{n^2}=n$ $\sqrt{n^2}=n$

- $$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{25n^4+7}-\sqrt{25n^4-11}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\sqrt{25n^4+7}-\sqrt{25n^4-11})(\sqrt{25n^4+7}+\sqrt{25n^4-11})}{\sqrt{25n^4+7}+\sqrt{25n^4-11}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot(\cancel{25n^4}+7-\cancel{25n^4}+11)}{\sqrt{25n^4+7}+\sqrt{25n^4-11}} = \frac{18}{5+5} = \frac{18}{10}$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$ $\quad a>1,\ a^n\to\infty$

$\quad 0<a<1,\ a^n\to 0$

- $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{8\cdot 7^n + 9\cdot 7\cdot 6^n}{3\cdot 7^{n+1} + 11\cdot 6^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8\cdot 7^n + 9\cdot 6^n}{3\cdot 7\cdot 7^n + 11\cdot 6\cdot 6^n} \underset{7^n>6^n}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8\cdot 7^n}{7^n} + \frac{9\cdot 6^n}{7^n}}{\frac{21\cdot 7^n}{7^n} + \frac{66\cdot 6^n}{7^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8 + 9\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n}{21 + 66\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n} = \frac{8}{21}$$

($\left(\frac{6}{7}\right)^n \to 0$)

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! - 3\cdot n!}{(n+1)! + 5n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)!} - \frac{3\cdot n!}{(n+1)(n!)}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)!} + \frac{5n!}{(n+1)(n!)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{3}{n+1}}{1 + \frac{5}{n+1}} = 1$$

($\frac{3}{n+1} \to 0$, $\frac{5}{n+1} \to 0$)

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot n^2 = \infty$$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot n = 0$$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\cdot n = 2$$

- $$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ פעמים}} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

- $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

סכום סדרה $\frac{n(n+1)}{2}$

כלל הסנדוויץ'

אם מתקיים החל ממקום מסוים $c_n \le a_n \le b_n$

וכן מתקיים: $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$

אז מתקיים בהכרח $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

לדוגמא

$$\begin{array}{ccccc} c_n & \le & a_n & \le & b_n \\ \downarrow & & | & & \downarrow \\ 7 & & \text{אז} & & 7 \\ & & \downarrow & & \\ & & 7 & & \end{array}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\underset{\text{כלל הסנדוויץ'}}{=}1$$ (an יורדת)*

$$1\leftarrow\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le a_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\longrightarrow 1$$

n פעמים האיבר הכי קטן ; n פעמים האיבר הכי גדול

כלל

אם $|a_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ (ערך מוחלט) אזי בהכרח $a_n\to 0$

כלל

אם הסדרה $\{a_n\}$ חסומה ו- $b_n\to 0$ אזי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=0$$

<u>הוכחה</u>

$$0\le|a_n\cdot b_n|\underset{|a_n|\le M}{\le}M\cdot\underset{0}{|b_n|}\longrightarrow 0$$

ומכלל הסנדוויץ', $|b_n\cdot a_n|\to 0$

ומכלל $a_n\cdot b_n\to 0$

$$\lim\frac{2n\cdot\sin(n!)}{n^3+7}\underset{\text{מכלל הסנדוויץ'.}}{=}0$$

$$0\le\left|\frac{2n\cdot\sin(n!)}{n^3+7}\right|\le\frac{2n\cdot 1}{n^3+7}\longrightarrow 0$$

5.12.19

אינפי'

משפט

כל סדרה מונוטונית וחסומה היא סדרה מתכנסת (כלומר יש לה גבול).

משפט

- סדרה מונוטונית עולה, החל ממקום מסויים מתקיים $a_n \le a_{n+1}$
- סדרה מונוטונית יורדת, החל ממקום מסויים מתקיים $a_n \ge a_{n+1}$

משפט

סדרה מתכנסת $\xrightarrow{\text{בהכרח}}$ סדרה חסומה. אבל סדרה מתכנסת לא בהכרח מונוטוני.

המספר e

$e \cong 2.7182...$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 3$ חסומה.

נראה שהסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה.

נראה e ו- $a_n \le a_{n+1}$. כלומר, צריך להראות e

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

תזכורת לא"ש הממוצעים

$a_i \ge 0$

$$\underbrace{\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}}_{\text{חשבוני}} \ge \underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}}_{\text{הנדסי}}$$

נראה עבור 2:

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$

$2\sqrt{ab} < a+b$

$4ab \le a^2+2ab+b^2$

$0 \le a^2-2ab+b^2$

$0 < (a-b)^2$

תמיד חיובי.

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{1\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ פעמים}}} \leq \frac{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} =$$

צריך n+1 איברים ולכן נוסיף

אי״ש ממוצעים

$$= \frac{(n+1)\cdot(1)+n\left(\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq 1+\frac{1}{n+1}$$ / העלה בחזקת $n+1$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$ מש״ל

מקרה בעייתי $\to 1^\infty$

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{n} \quad n\to\infty$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e$$

זהים.

דוגמא

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{7n} = \lim_{n\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{2n}{3}}\right)^{\frac{2n}{3}}}_{e}\Bigg]^{\frac{7\cdot 3}{2}} = e^{\frac{21}{2}}$$

כלל

נתון $a_n \to 1$, $b_n \to \pm\infty$

אז $$\lim_{n\to\infty} a_n^{\,b_n} = e^L$$

כאשר $$L = \lim_{n\to\infty}(a_n-1)\cdot b_n$$

הוכחה

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\,b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+(a_n-1)\right)^{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{a_n}}\right)^{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{(a_n-1)b_n} =$$

$$\left(= e^{(a_n-1)b_n}\right) = e^L$$

דוגמא

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{5n-7}\right)\right)^{9n+3}$ $\underset{\infty}{\downarrow}$ $= e^{L} = e^{\frac{18}{5}}$

$\frac{2}{5n-7} \to 0$, $\left(1+\frac{2}{5n-7}\right) \to 1$

מתקיים כלל.

$(*)$ $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\cancel{1}+\frac{2}{5n-7}-\cancel{1}\right)(9n+3) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{18n+6}{5n-7} = \frac{18}{5}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5n-2}{7n^2+3}\right)^{6-2n}$ $\underset{-\infty}{\downarrow}$ $= e^{L} = e^{\frac{10}{7}}$

$\frac{5n-2}{7n^2+3} \to 0$, $\left(1-\frac{5n-2}{7n^2+3}\right) \to 1$

$(*)$ $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5n-2}{7n^2+3}-1\right)(6-2n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-(5n-2)(6-2n)}{7n^2+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-30n+10n^2-12-4n}{7n^2+3} = \frac{10}{7}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)^{n} = \infty$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n-7}{5n+3}\right)^{6n} = e^{-12}$

$\left(\frac{5n-7}{5n+3}\right) \to 1$

$L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n-7}{5n+3}-1\right)6n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{5n}-7-\cancel{5n}-3}{5n+3}\right)6n = \lim \frac{-60n}{5n+3} = -12.$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n-2n^2+6}{8-2n^2}\right)^{\frac{5n^2-2}{7n}} = e^{-\frac{35}{14}}$

$\frac{35n^3-10n^2-14n+4}{-14n^3}$

$7n-2$

$L = \lim\left(\frac{7n-2n^2+6}{8-2n^2}-1\right)\left(\frac{5n^2-2}{7n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n-\cancel{2n^2}+6-8+\cancel{2n^2}}{8-2n^2}\right)\left(\frac{5n^2-2}{7n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{35n^3}{-14n^3} = -\frac{35}{14}.$

סדרות חיוביות

כלל המנה (ד'אלמבר)

נתון $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

אם $L<1 \xrightarrow{\text{אז}} a_n \to 0$

אם $L>1 \xrightarrow{\text{אז}} a_n \to \infty$

אם $L=1 \xrightarrow{\text{אז}}$ אי ודאות

דוגמאות:

• $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ "

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{\frac{1}{3^{n+1}}}_{a_{n+1}} \cdot \underbrace{3^n}_{a_n} = \frac{3^n}{3\cdot 3^n} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{L} < 1$$ לכן $\boxed{a_n \to 0}$

• $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$ אי ודאות לפי כלל המנה.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{a_{n+1}} \cdot \underbrace{\frac{n}{1}}_{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

• $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0$ "

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2} \cdot \cancel{2n!}}{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot \cancel{2n!} \cdot \cancel{(n!)^2}} =$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \frac{1}{4} < 1$$

לכן $\boxed{a_n \to 0}$

• $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} = \infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3\cdot 3^n \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \frac{3\cdot \cancel{3^n} \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!} \cdot n^n}{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n \cdot \cancel{3^n} \cdot \cancel{n!}} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3\cdot e^{-1} = \frac{3}{e} > 1$$

(*) לכן $a_n \to \infty$

(*) $L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} - 1\right)\cdot n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-n-1}{n+1}\right) n = \lim \frac{-n}{n+1} = -1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(\pi+1)(\pi+2)\cdot(\cdots\cdot(\pi+n)} =$$ לא ידוע כרגע.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\,\cancel{(n!)}}{\cancel{(\pi+1)\cdots}(\pi+n+1)} \cdot \frac{\cancel{(\pi+1)\cdots(\pi+n)}}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{\pi+n+1} \to 1$$

משפט - כלל השורש

נתון $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

אם $L<1$ אז $a_n \to 0$

אם $L>1$ אז $a_n \to \infty$

אם $L=1$ אז לא ידוע.

דוגמאות

- $\lim \frac{1}{3^n} = 0$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$$

לכן $a_n \to 0$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{3}{7n}\right)^{n(n-1)}} = 0$

חוק ~~המנה~~ השורש

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+\frac{3}{7n}}\right)^{n(n-1)}} = \frac{1}{\left(1+\frac{3}{7n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{e^{\frac{3}{7}}} < 1$$ לכן $a_n \to 0$

חוק של e.

$$\left(1+\frac{3}{7n}\right)^{n+1} \Rightarrow L = \left(1+\frac{3}{7n}-1\right)(n+1) = \frac{3n+3}{7n} \to \frac{3}{7}$$

כללים

(לכל a קבוע) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

הסבר

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \to a^0 \Rightarrow 1$$

$$n^{\frac{1}{n}} \to 0$$

$n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$

דוגמאות

• $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{9^n+8^n} =$

$$9 = \sqrt[n]{9^n} \leq \sqrt[n]{9^n+8^n} \leq \sqrt[n]{2\cdot 9^n} = \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\downarrow 1}\cdot 9 = 9$$

הורדנו 8^n אז הקטנו

9^n הגדלה

לפי סנדוויץ' הגבול הוא 9.

• $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n+2^n+\ldots\ldots+2019^n} = 2019$

$$2019 = \sqrt[n]{2019^n} \leq \sqrt{\quad} \leq \sqrt[n]{2019\cdot 2019^n} = \sqrt[n]{2019}\cdot 2019 = 2019$$

• $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2019^n-2018^n+2017^n\ldots\ldots\pm 1^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2019\left(\sqrt[n]{\underset{\downarrow 1}{1}-\underbrace{\underset{\downarrow 0}{\left(\frac{2018}{2019}\right)^n}+\underset{\downarrow 0}{\left(\frac{2017}{2019}\right)^n}-\ldots\ldots\underset{\downarrow 0}{\left(\frac{1}{2019}\right)^n}}}\right) =$

$\downarrow 1$

[illegible] שואף ל-0.

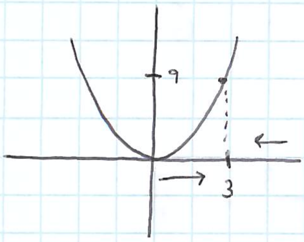
$$= 1\cdot 2019 = 2019$$

12.12.19

אינפי א'

גבול של פונקציה

דוגמא

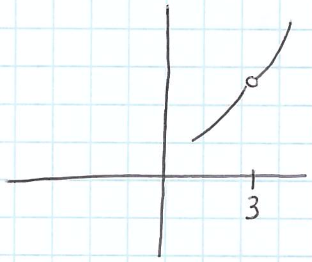


$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9$$

נקח את הפונקציה $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, אז כאשר x שואף ל-4 הגבול יהיה... $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-9}{x-3} = 7$

אבל כאשר x שואף ל-3, $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = ?$

נראה שכאשר נציב 3 יהיה לנו $\frac{0}{0}$, נראה מה קורה ליד 3,



$x = 3.1 \leftarrow f(x) = 6.1$

$x = 3.01 \leftarrow f(x) = 3.01$

$x = 2.99 \leftarrow f(x) = 5.99$

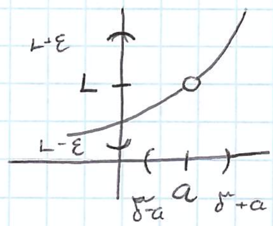
הגדרת הגבול

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ $(\delta(\varepsilon))$ כך שלכל $0<|x-a|<\delta$ מתקיים: $|f(x)-L|<\varepsilon$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

הסבר

לכל סביבה קטנה של ε קיימת סביבה קטנה של δ כך שבסביבה הזאת קיים גבול L.



תזכורת כפל מקוצר

$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

דוגמאות מהסוג "$\frac{0}{0}$"

- $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{(\cancel{x-3})(x+3)}{(\cancel{x-3})}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6$

- $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(\cancel{x-1})(x-3)}{(2x+1)(\cancel{x-1})}=\frac{1-3}{2+1}=-\frac{2}{3}$

$x_{1,2}=x^2-4x+3 \rightarrow x=1,\ 3 \rightarrow (x-1)(x-3)$

$2x^2-x-1=x \rightarrow x=1,-\frac{1}{2} \rightarrow (2x+1)(x-1)$

תרגילים

- הצבה בנוסחה

$\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^3-54}{3x^2-10x+3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{2(x-3)^3(x^2+3x+9)}{3(\cancel{x-3})(x-\frac{1}{3})}=\frac{2\cdot27}{8}=\frac{27}{4}$

$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{10\pm8}{6}=3,\ \frac{1}{3}$

- $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^3+125}{x^2-13x+30}=\left(\lim\limits_{x\to4}\frac{(x+5)(x^2+5x+25)}{(x-10)(x-3)}\right)=-31.5$

$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{169-120}}{2}=\frac{13\pm7}{2}=10,\ 3$

- $\lim\limits_{x\to6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{2x-12}\underset{\text{כפל בצמוד}}{=}\lim\limits_{x\to6}\frac{(\sqrt{x+3}-3)(\sqrt{x+3}+3)}{2(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}=\lim\limits_{x\to6}\frac{(\overbrace{x+3-9}^{\cancel{x-6}})}{2(\cancel{x-6})(\sqrt{x+3}+3)}=$

$=\lim\limits_{x\to6}\frac{1}{2(\sqrt{x+3}+3)}=\frac{1}{12}$

- $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{8x+1}-3}{\sqrt{x^2+3}-2}\underset{\text{כפל בצמוד של מונה ומכנה.}}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{(\sqrt{8x+1}-3)(\sqrt{8x+1}+3)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)(\sqrt{8x+1}+3)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\overbrace{(8x+1-9)}^{8(\cancel{x-1})}(\sqrt{x^2+3}+2)}{\underbrace{(x^2+3-4)}_{(\cancel{x-1})(x+1)}(\sqrt{8x+1}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{8(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(\sqrt{8x+1}+3)}=\frac{8}{3}$

כל החוקים של סדרות עובדים עם $x\to\infty$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x+3}=e^6$

$1=\left(1+\frac{3}{x-2}-1\right)(2x+3)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+9}{x-2}=6$

עוד חוקים

- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$t=\frac{1}{x}$ אם $\xrightarrow[\text{אז}]{} \lim\limits_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

- $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \lim\limits_{x \to 0} \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln(e) = 1$

$\boxed{\ln x^n = n \cdot \ln x}$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$t = \ln(1+x)$
כאשר $x \to 0$ אז $t \to 0$

$\xrightarrow[\text{אז}]{} \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1$

$e^t = 1+x$
$x = e^t - 1$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{5x}-1}{7x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5 \cdot (e^{5x}-1)}{7 \cdot 5 \cdot x} = \frac{5}{7}$

נוסיף למכנה

הוספנו 5 למכנה

צריך להיות זהה.

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{13x}-1}{8x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{13 \cdot (e^{13x}-1)}{8 \cdot 13x} = \frac{13}{8}$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{7x}-1}{e^{3x}-1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \cdot 7 \cdot e^{7x}-1}{3 \cdot 7 \cdot e^{3x}-1} = \frac{7}{3}$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{7x}-e^{5x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{7x}}{x} - \frac{e^{5x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{7e^{7x}}{7x} - \frac{5e^{5x}}{5x} = 7-5=2$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+7x)}{8x} = \lim_{x\to 0} \frac{7}{8}\frac{(\ln(1+7x))}{\cdot 7x} = \frac{7}{8}$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+11x^2)}{\ln(1+2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x^2)}{(2x^2)\ln(1+2x^2)} \cdot \frac{(11x^2)\ln(1+11x^2)}{(11x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{11x^2}{2x^2} = \frac{11}{2}$$

- $$\lim_{x\to +\infty} x\cdot(e^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot(e^{t}-1) = \lim_{t\to 0}\frac{(e^{t}-1)}{t} = 1$$

$t=\frac{1}{x}$

$x=\frac{1}{t}$

$?^3$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = 1$$

- $$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$$

$t=x-1$; t

$x\to 1$ sic $t\to 0$

$$\bullet\quad y=\frac{x^2}{x^2+2x-3}$$

ת"ה

$x^2+2x-3\neq 0$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm4}{2}=\begin{cases}-3\\1\end{cases}\qquad x\neq-3,\quad x\neq1$$

אס' אנכית

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2}{(x^2+2x-3)}=\lim_{x\to-3}\frac{x^2}{x^2+2x-3}=\text{"}\pm\infty\text{"}\qquad \left(\frac{\neq0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2}{x^2+2x-3}=\pm\infty\qquad \left(\frac{\neq0}{0}\right)$$

אנכית $x=1$, $x=-3$

חיתוך צירים

$x=0$	$y=0$
$y=0$	$0=x^2$
	$x=0$

$(0,0)$

משופעת

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x^2+2x-3)x}=0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+2x-3}-0\right)=\frac{1}{1}=1$$

$$\boxed{y=1}$$

עליה וירידה

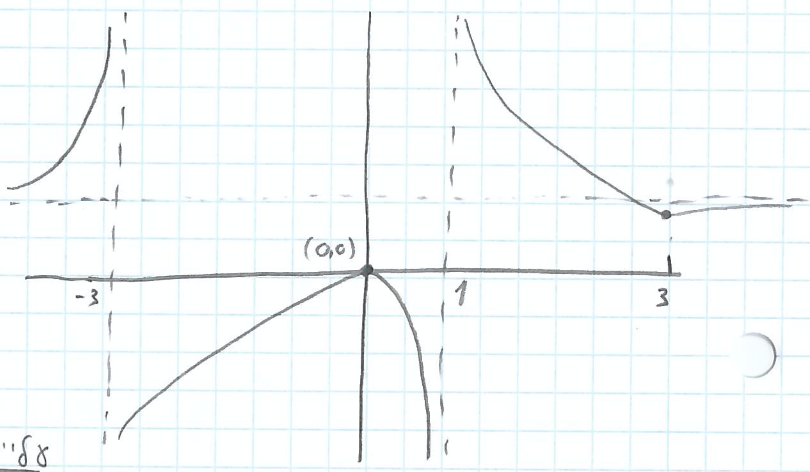
$$f'(x)=\frac{2x\overbrace{(x^2+2x-3)}^{(x-1)(x+3)}-x^2\overbrace{(2x+2)}^{2(x+1)}}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$0=\frac{\cancel{2x^3}+4x^2-6x-\cancel{2x^3}-2x^2}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$0=2x^2-6x \Rightarrow 0=2x(x-3)\qquad x=0,\ x=3$$

x	-5	$\boxed{-3}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\boxed{1}$	2	3	5
$f'(x)$	$+$ ↗		$+$ ↗		$-$ ↘		$-$ ↘		$+$ ↗

$(0,0)$ max $\qquad (3,\frac{3}{4})$ min



עלייה

$x<-3$, $-3>x>0$, $x>3$

ירידה

$.0<x<1$, $1<x<3$

19.12.19

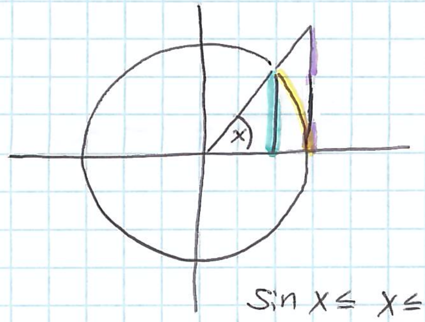
אינפי א'

$$\sin x \le x \le \tan x$$

$$\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x} \quad /:\sin x$$

$$1 \le \frac{1}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{1}=1$$

ולכן לפי הסנדוויץ'.



x

$\sin x$

$\tan x$

$\sin x \le x \le \tan x$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

(ברדיאנים)

מהצורה $\frac{0}{0}$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{10\sin 10x}{7x\cdot 10}=\frac{10}{7}$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}\cdot\frac{\frac{7x}{7x}}{\frac{3x}{3x}}\cdot\frac{7x}{3x}=\frac{7}{3}$$

כאשר $x\to 0$ אז $\cos\to 1$

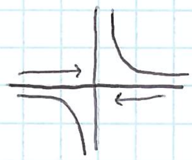
- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{4\cdot x^2}{4}}=\frac{1}{2}$$

דרך 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(1-\cos x)(1+\cos x)}^{1-\cos^2 x}}{x^2(\cos x+1)}=\frac{\sin x^2}{x^2(\cos x+1)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

מהצורה $\frac{\neq 0}{0}$

- $\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty$, - $\left(\frac{1}{0^-}\right)=-\infty$



מצבים של a^-, a^+

- $$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}=\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=\left(\frac{1}{0^-}\right)=-\infty$$

- $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-5}{(x-2)(x+3)} = \frac{-3}{0^+\cdot 5} = -\infty$, $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-5}{(x-2)(x+3)} = \frac{-3}{0^-\cdot 5} = +\infty$

  $0^+ \cdot 5 \to 0^+$, $0^- \cdot 5 \to 0^-$

- $\lim_{x\to -4} \frac{5x}{(4+x)^2} = -\infty$

$\lim_{x\to -4^-} \frac{5x}{(4+x)^2} = \frac{-20}{0^+} = -\infty$, $\lim_{x\to 4^+} \frac{5x}{(4+x)^2} = \frac{-20}{0^+} = -\infty$

$e^{\infty} = \infty$ $\qquad$ $e^{-\infty} = 0$

$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

אם יש פונקציה מפוצלת, נעשה גבול ב-a^+, a^-

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ 2x+1 & x < 3 \end{cases}$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} x^2 = 9$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} 2x+1 = 7$

כאשר הגבולות החד צדדיים לא שווים אחד לשני, לפונקציה אין גבול. אבל יש לה גבולות חד צדדיים.

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x > 2 \\ 5 & x = 2 \\ \frac{7x}{2-x} & x < 2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4$

$\lim_{x\to 2^-} \frac{7x}{2-x} = \frac{14}{0^+} = \infty$

רציפות

הגדרה

$f(x)$ תהיה רציפה בנק' $x=a$ אם מתקיים:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

אם מתקיים $\lim_{x\to a} f(x) = L$ אז: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$

אז $\lim_{x\to 4} x^2 = f(4) = 16$ $f(x) = x^2$

איפה שפונקציה לא מוגדרת אין רציפות ואין אי רציפות

משפט (חשוב ביותר)

כל הפונקציות האלמנטריות רציפות בתחום הגדרתן.

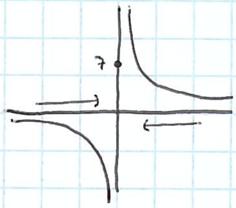
(פונקציה מפוצלת לא אלמנטרית).

לדוגמה

$f(x) = \frac{1}{x}$ אז ת"ה $x \neq 0$ ובשאר התחום היא מוגדרת ורציפה.

(אלמנטרית).

אבל $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 7 & x=0 \end{cases}$ היא מוגדרת לכל x אבל הגבול שלה ב-0 לא 7 ולכן לא רציפה.



אי רציפות

הגדרה

את האי רציפות אנחנו מחלקים ל-3 סוגים:

I) אי רציפות סליקה:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \overset{\text{מס' סופי}}{L} \neq f(a)$$

II) אי רציפות קפיצה:

$$\overset{\text{מס' סופי}}{L_1} = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x) = \overset{\text{מס' סופי}}{L_2}$$

III) אי רציפות ממין שני:

כל אי רציפות שהיא לא סליקה או לא קפיצה, כלומר, כל השאר.

(בנק' שאין גבול או שלפחות אחד הגבול החד צדדיים אינסופי).

דוגמאות

- $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & x>2 \\ 5 & x=2 \\ 3x & x<2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2+2) = 6$$

אבל $f(2)=5 \longrightarrow$ אי רציפות מסוג סליקה.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3x = 6$$

- $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & x>2 \\ 5 & x=2 \\ 3x & x<2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2+3) = 7$$

$7 \neq 6 \longrightarrow$ אי רציפות מסוג קפיצה.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3x = 6$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{2x^2-x-1} & x>1 \\ 7 & x=1 \\ \frac{5-x}{x-1} & x<1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{5-x}{x-1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \longrightarrow$$ אי רציפות מסוג שני.

- $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = ?$ ~~[illegible]~~ אין גבול,

לכן ל- $f(x)$ אין גבול.

הוכחה שלפונקציה אין גבול

אם $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ אז $\overset{\text{סדרה}}{a_n} \longrightarrow a$ כך ש $f(a_n)\longrightarrow L$

אז בדוגמא: $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

$$a_n=\frac{1}{2\pi n} \Longrightarrow \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}\right)=\sin \pi n=0$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n} \Longrightarrow \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$$

לכן קיימות 2 סדרות ששואפות למס' שונים, ולכן אין לזה גבול.

תרגילים

- $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{2+e^{\frac{5}{x-2}}} & x\neq 2\\ 4 & x=2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{8}{2+e^{\frac{5}{x-2}}}=\frac{8}{2+e^{\infty}}=\frac{8}{2+\infty}=0$$

הגבולות החד צדדיים סופיים ושונים ולכן נק' אי רציפות מסוג קפיצה.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{8}{2+e^{\frac{5}{x-2}}}=\frac{8}{2+e^{-\infty}}=\frac{8}{2+0}=4$$

- $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10}{5+e^{\frac{3-x}{(x-4)^2}}} & x\neq 4\\ 0 & x=4\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{10}{5+e^{\frac{3-x}{(x-4)^2}}}=\frac{10}{5+e^{\frac{-1}{0^+}}}=2$$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{10}{5+e^{\frac{3-x}{(x-4)^2}}}=\frac{10}{5+e^{\frac{-1}{0^+}}}=2$$

הגבולות החד צדדיים סופיים ושווים אבל לא שווים לערך של הפונקציה בנק' ולכן נק' אי רציפות מסוג סליקה.

26.12.19

אינפי א'

משפט וויירשטראס

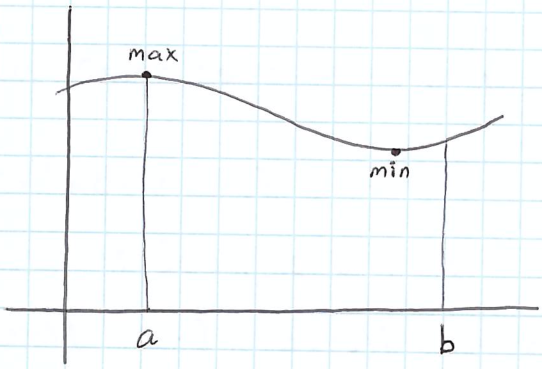
פונקציה רציפה מוגדרת ורציפה בקטע סגור, חסומה בו ומקבלת את חסמיה.

(מקבלת מינימום ומקסימום).

$[a,b]$
$a \le x \le b$

(a,b)
$a < x < b$

$(a,b]$
$a < x \le b$

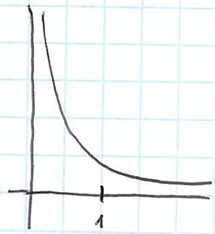


דוגמא

$f(x)=\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1]$

היא לא חסומה בקטע סגור [ ] (אבל רציפה)

ולכן לא חסומה.

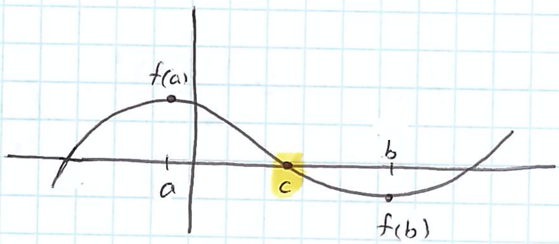


משפט ערך הביניים של קושי

נתונה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בקטע $[a,b]$, המקיימת $f(a)\cdot f(b)<0$

אזי קיימת נק' c, $a<c<b$ כך ש $f(c)=0$. (קיים לפחות שורש 1 $c=$)

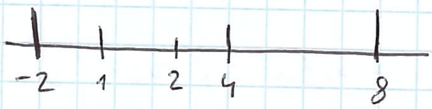
שורשי הפונקציה, איפה שהפונקציה שווה ל-0.



דוגמא

1) $f(x)=x^3-2x-2$

$f(0)=-2$, $f(8)>0$ אז בין $0<x<8$ קיים שורש (קיימת ורציפה לכל x, כי היא אלמנטרית.



$f(0)=-2$, $f(4)>0$ אז קיים c_2 כך ש $f(c_2)=0$.

$f(2)>0$, $f(1)<0$. $0<f(1.85)$, $f(1.75)<0$ אז השורש בין $1.75<c<1.85$.

2) נוכיח שלפולינום לפחות שורש 1.

$$f(x) = x^3 - 7x^2 - 13$$

$f(10)>0$, $f(-10)<0$, ולכן לפי חוק ערךהביניים יש לפחות שורש 1 בקטע הסגור $[-10, 10]$.

$$f(10)\cdot f(-10) < 0$$

הערה

כל פולינום אי זוגי (חזקה הגבוהה אי זוגית) תמיד יש לו לפחות שורש 1.

3) $f(x) = x^4 + 5x^2 + 3x - 1$

הוכח כי לפונקציה יש לפחות 2 שורשים:

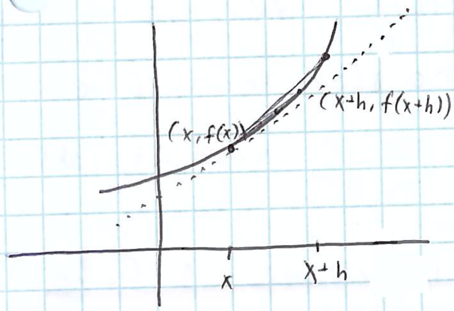
$f(100)>0$, $f(-100)>0$ אבל $f(0)<0$ אז בקטע $[-100,0]$ ובקטע $[0,100]$ קיים שורש מכל אחד.

נגזרת

שיפוע המשיק. (בנק' קיצון השיפוע 0).

הגדרה

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$



יהיה במבחן למצוא נגזרת לפי הגדרה.

דוגמא:

- $f(x) = x^2$, $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 2x + \overset{\to 0}{h} = 2x$$

נגזרות ידועות

- $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$
- $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$
- $f(x) = a^x$, $f'(x) = a^x \ln a$
- $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

- $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $f(x) = \cot x$, $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $f(x) = \arcsin(x)$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- $f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \underset{\text{כפל בצמוד}}{=} \lim\limits_{h\to 0}\frac{\overset{a^2-b^2}{\cancel{x}+h-\cancel{x}}}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+\underset{0}{h}}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- $f(x)=\frac{1}{x}$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{x}-\cancel{x}-\cancel{h}^{-1}}{\cancel{h}(x(x+\underset{0}{h}))} = \frac{-1}{x\cdot x} = \frac{-1}{x^2}$

- $f(x)=e^x$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} e^x\underbrace{\frac{(e^h-1)}{h}}_{\to 1} = e^x$

- $f(x)=\ln x$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\cdot\frac{1}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim\limits_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\cdot\underbrace{\ln e}_{1} = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{h\to 0}\underbrace{\left(1+\frac{h}{x}\right)}_{\to 1}^{\overset{\to\infty}{\frac{1}{h}}} = e^L = e^{\frac{1}{x}}$

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$L=\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{h} = \frac{1}{x}$

- $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \underset{\text{הצבה בנוסחא}}{=} \lim\limits_{h\to 0}\frac{2\underbrace{\sin\frac{h}{2}}_{\to 1}\cdot\cos\left(x+\underbrace{\frac{h}{2}}_{\to 0}\right)}{\frac{h}{2}\cdot 2}$ הופכי

$= \cos x$.

<u>כללי גזירה</u>

$(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$

$(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)$

$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$ או $(U\cdot V)' = U'\cdot V + V'\cdot U$

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$ או $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'\cdot V - V'U}{V^2}$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \underset{\substack{\downarrow\\ \text{מכנה משותף}}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h\,(g(x+h)\,g(x))} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \left[\frac{f(x+h)\,g(x) - \overbrace{f(x)\cdot g(x)}^{\text{הורדנו}} - f(x)g(x+h) + \overbrace{f(x)\,g(x)}^{\text{והוספנו}}}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left[g(x)\underbrace{\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}}_{\substack{\text{הגדרת הנגזרת}\\ f'(x)}} - f(x)\underbrace{\frac{(g(x+h)-g(x))}{h}}_{\substack{\text{הגדרת הנגזרת}\\ g'(x)}} \right] \underset{\substack{\downarrow\\ \text{הצבת}\\ h=0}}{=} \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

<u>דוגמאות</u>

- $f(x) = e^{5x-2x^2}$, $f'(x) = e^{5x-2x^2}\cdot(5-4x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{5(x+h)-2(x+h)^2} - e^{5x-2x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{5x+5h-2x^2-4xh-2h^2} - e^{5x-2x^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{5x-2x^2}\left[e^{5h-4xh-2h^2} - 1\right]}{h} = \lim_{h\to 0} e^{5x-2x^2} \underbrace{\frac{\left[e^{h(5-4x-2h)} - 1\right]}{h(5-4x-2h)}}_{\downarrow\ 1} \underbrace{(5-4x\text{-}}_{\downarrow\ 5-4x}$$

$$= e^{5x-2x^2}\cdot(5-4x)$$

- $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ $\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\sqrt{x+h}} - e^{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}\left[\frac{e^{\sqrt{x+h}}}{e^{\sqrt{x}}} - 1\right]}{h} =$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} - 1\right)}{h\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right) = \lim e^{\sqrt{x}}\cdot 1\cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\to 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h((\sqrt{x+h}+\sqrt{x}))} = \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

• $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln((x+h)^2 - 3(x+h)) - \ln(x^2 - 3x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{(x+h)^2 - 3(x+h)}{x^2 - 3x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h}{x^2 - 3x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x(x-3) + h(h-3+2x)}{x(x-3)}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h(h-3+2x)}{x(x-3)}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{h(h-3+2x)}{x(x-3)}\right)}{h\left(\frac{h-3+2x}{x(x-3)}\right)}}_{\to 1} \left(\frac{h-3+2x}{x(x-3)}\right)$$

$$= \frac{-3+2x}{x(x-3)}$$

הדרך של משה

$$\lim_{h \to 0} \ln \underbrace{\left(\frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h}{x^2 - 3x}\right)}_{\to 1}{}^{\overbrace{\frac{1}{h}}^{\to \infty}} = \lim_{h \to 0} \ln e^{L} = \ln e^{\frac{2x-3}{x^2-3x}} = \frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \cancel{\ln e}$$

$$L = \lim_{h \to 0} \left(\frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h}{x^2 - 3x} - 1\right) \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h - x^2 + 3x}{x^2 - 3x} \cdot \frac{1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h - 3)}{x^2 - 3x} \cdot \frac{1}{h} = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x}$$

2.1.20

אינפי א'

המשך נגזרות - הוכחת קיום.

$y' = \frac{dy}{dx}$, $x' = \frac{dx}{dy}$

$y = \arcsin x$

מתקיים

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

אז

- $y = \arcsin x \xrightarrow{\text{ההפוך}} x = \sin y$

$$x' = \underbrace{\cos y}_{(\sin)' = \cos} = \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 y}}_{\text{זהות}} = \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\sin y = x}$$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $y = \arctan x \xrightarrow{\text{ההפוך}} x = \tan y$

$$x' \underset{(\tan)' = \frac{1}{\cos^2}}{=} \frac{1}{\cos^2 y} \underset{\text{זהות}}{=} 1 + \tan^2 y \underset{\substack{\tan y = x \\ \tan^2 y = x^2}}{=} 1 + x^2$$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{1+x^2}$$

המשך דוגמאות (מתוך החוקים)

- $y = 8x^5 - 7x^3 + 4x^2 - 9x^{-1} + 13x - 2$

$y' = 40x - 21x^2 + 8x + 9^{-2} + 13$

- $y = e^{x^2-5x}$

$y' = e^{x^2-5x} \cdot (2x-5)$

- $y = \sqrt{x^2-5x}$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-5x}} \cdot (2x-5)$

- $y = \ln(x^2-5x)$

$y' = \frac{1}{x^2-5x} \cdot (2x-5)$

- $y = 8^{x^2-5x}$

$y' = 8^{x^2-5x} \cdot \ln 8 \cdot (2x-5)$

- $y = \sin(x^2-5x)$

$y' = \cos(x^2-5x) \cdot (2x-5)$

- $y = \tan(x^2-5x)$

$y' = \frac{1}{\cos^2(x^2-5x)} \cdot (2x-5)$

• $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x}{7x + 3}}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-5x}{7x+3}}} \cdot \left(\frac{(2x-5)(7x+3) - 7(x^2-5x)}{(7x+3)^2}\right)$$

• $y = e^{\sqrt{\frac{8x+3}{x^2+9x}}}$

$$y' = e^{\sqrt{\frac{8x+3}{x^2+9x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{8x+3}{x^2+9x}}} \cdot \left(\frac{8(x^2+9x) - (2x+9)(8x+3)}{(x^2+9x)^2}\right)$$

• $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$$y' = \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\cancel{\sqrt{x^2+1}}} \cdot \cancel{2}x\right) = \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}\left(\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1} + x}}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

• $y = \ln\sqrt{\dfrac{7e^{3x} + 5x^{-1}}{x^3 + \sin 2x}}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{7e^{3x}+5x^{-1}}{x^3+\sin 2x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{7e^{3x}+5x^{-1}}{x^3+\sin 2x}}} \cdot \left(\frac{(21e^{3x} - 5x^{-2})(x^3+\sin 2x) - (7e^{3x}+5x^{-1})(3x^2+2\cos 2x)}{(x^3+\sin 2x)^2}\right)$$

או

$$y = \ln\left(\frac{7e^{3x}+5x^{-1}}{x^3+\sin 2x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\ln(7e^{3x}+5x^{-1}) - \ln(x^3+\sin 2x)\right] =$$ ואז לגזור.

• $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$y = e^x - e^{-x} \Rightarrow y' = e^x + e^{-x}$

$y = e^x + e^{-x} \Rightarrow y' = e^x - e^{-x}$

$$y' = \frac{(e^x+e^{-x}) \cdot (e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

• $y = \sin^2 x$

$$y' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \underset{\text{נוסחה.}}{=} \sin 2x$$

$$y=\frac{\sqrt{(x^3-5x^2)e^{7x}}}{\ln(x^2-7x)}+\frac{1}{x+\ln x}$$

$$y'=\frac{1}{(2\sqrt{(x^3-5x^2)e^{7x}}}\cdot$$

$$f=\sqrt{(x^3-5x^2)e^{7x}}$$

$$f'=\frac{1}{2\sqrt{(x^3-5x^2)e^{7x}}}\cdot\left[(3x^2-10x)e^{7x}+(x^3-5x^2)\cdot 7e^{7x}\right]$$

$$g=\ln(x^2-7x)$$

$$g'=\frac{1}{(x^2-7x)}\cdot(2x-7)$$

$$y'=\frac{\left(\frac{1}{(2\sqrt{(x^3-5x^2)e^{7x}})}\cdot\left[(3x^2-10x)e^{7x}+(x^3-5x^2)e^{7x}\cdot 7\right](\ln(x^2-7x))\right)-\left(\sqrt{\frac{(x^3-5x^2)e^{7x}}{\ln(x^2-7x)}}\cdot\frac{1}{(x^2-7x)}\cdot(2x-7)\right)}{(\ln(x^2-7x))^2}$$

$$+\frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{(x+\ln x)^2}$$

חקירת פונקציה

$y=x^3-3x$

תהליך חקירת פונקציה (לא כל החלקים, בהמשך במלואה).

1. ת"ה - אסור 0 במכנה, $x>0;\ \ln(x)$, $\sqrt{x}\ ;\ x\geq 0$
2. חיתוך עם הצירים - עם ציר y ; $x=0$ עם ציר x ; $y=0$.
3. עלייה, ירידה, מינימום ומקסימום.

כללים

אם $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ עולה

אם $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ יורדת

אם $f'(x)=0 \Rightarrow$ חשוד לנק' קיצון (מינימום/מקסימום מקומיים).

• $y=x^3-3x$

1) ת"ה כל x.

2) חיתוך עם הצירים:

$x=0$, $y=0$

$y=0$

$0=x^3-3x$

$0=x(x^2-3)$

$0=x$, $x=\pm\sqrt{3}$

$(0,0)$ $(\sqrt{3},0)$ $(-\sqrt{3},0)$

$y'=3x^2-3$

$y'=0$

$0=3x^2-3$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

x	-2	-1 (max)	0	1 (min)	2
y'	$+$ ↗		$-$ ↘		$+$ ↗

$y'(-2)=+$

$y'(0)=-$

$y'(2)=+$

3) הצבה

$x=-1$, $y=-1+3$, $y=2$

$x=1$, $y=1-3$, $y=-2$

$(-1,2)$ max

$(1,-2)$ min

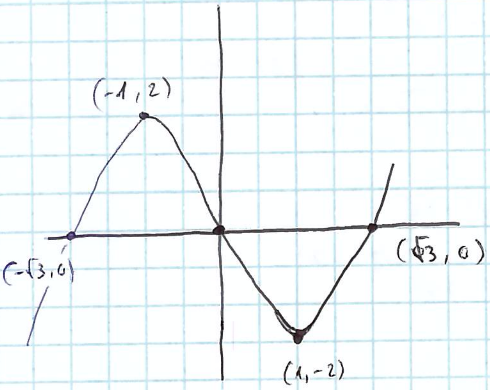
תחומי עלייה

$x<-1$

$x>1$

תחומי ירידה

$-1<x<1$



$(0,0)$
$(\sqrt{3},0)$ נקודות חיתוך
$(-\sqrt{3},0)$

$(1,-2)$ min
$(-1,2)$ max

תרגיל

$f(x)=x^4-4x^3$

ת"ה כל x

$x=0$

$f(0)=0$

$(0,0)$

$y=0$

$0=x^4-4x^3$

$0=x^3(x-4)$

$x=0$ $\quad$ $x=4$

$(0,0)$ $\quad$ $(4,0)$

$y'=4x^3-12x^2$

$0=4x^2(x-3)$

$x=0$ $\quad$ $x=3$

$(0,0)$ $\quad$ $(3,-27)$

x	-1	0	1	3	5
y'	−		−		+

min

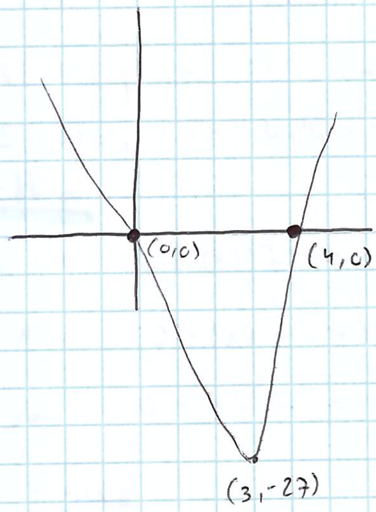
עליה

$x>3$

ירידה

$0<x<3$

$0<x$



$y = \frac{4x}{x^2+1}$ $\qquad x^2+1>0$

ת"ה כל x

x		-2		0 (-1)		1		2
y'		$-$		$+$		$-$		
		↘ min		↗		max ↘		

עליה

$-1<x<1$

ירידה

$x>1$
$x<-1$

$\underline{x=0}$

$y=\frac{0}{1}=0$

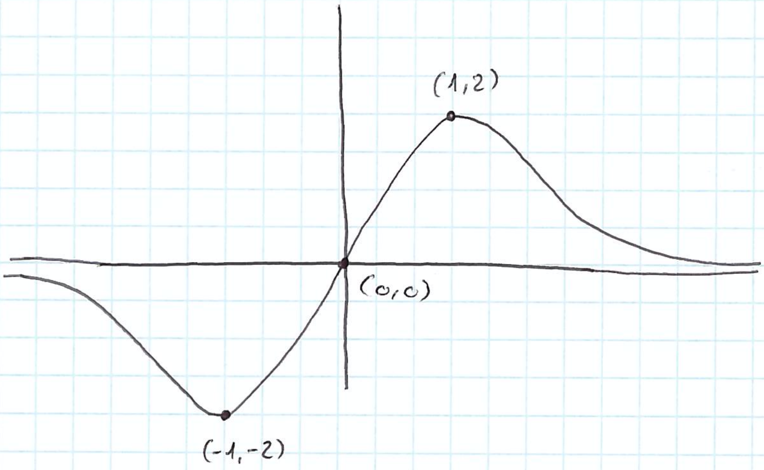
$(0,0)$

$\underline{y=0}$

$0=\frac{4x}{x^2+1}$

$0=4x$
$0=x$

$(0,0)$



$$y'=\frac{4\cdot(x^2+1)-(4x)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$0=\frac{4x^2+4-8x^2}{x^4+2x^2+1}$$

$0=-4x^2+4$

$0=-x^2+1$ $\qquad (1,2)$

$x^2=1$ $\qquad (-1,-2)$

$x=\pm1$

נקודת פיתול

אם $f''(x)>0 \Leftarrow f(x)$ קמורה $\cup$ (קמורה כלפי מעלה).

אם $f''(x)<0 \Leftarrow f(x)$ קעורה $\cap$ (קמורה כלפי מטה).

אם $f''(x)=0 \Leftarrow$ חשד לנק' פיתול (מעבר מקמורה לקעורה וההפך).

דוגמא

$y=x^4-4x^3$

$y'=4x^3-12x^2$

$y''=12x^2-24x$

$0=12x^2-24x$

$0=12x(x-2)$

$x=0 \qquad x=2$

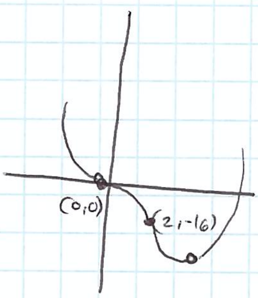
$(0,0) \qquad (2,-16)$

חשודות לפיתול

x	-1	0	1	2	3
y''	$+$ $\cup$		$-$ $\cap$		$+$ $\cup$
		נקודת פיתול		נק' פיתול	

קמירות:

$x>2$
$x<0$



קעירות:

$1<x<2$

x		2		5
y''	$+$ $\cup$		$-$ $\cap$	$-$ $\cap$
		פיתול		לא פיתול

9.1.20

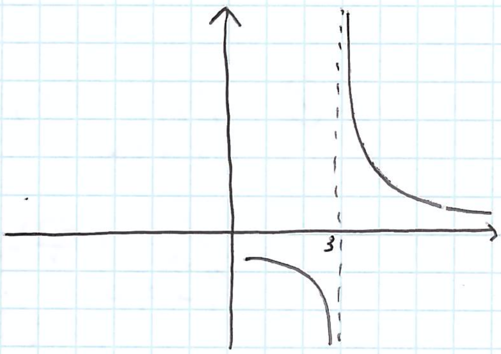
אינפי א'

אסימפטוטה

משוואות ישר שהפונקציה שואפת להתנהג כמוהה. קיימות 2 אסימפטוטות:
אנכית ומשופעת.

אנכית

$f(x) = \frac{1}{x-3}$



אם מתקיים $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ (לפחות מצד אחד),

אזי $x=a$ אסימפטוטה אנכית.

אנחנו מחפשים אסימפטוטה אנכית רק בנקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת או בקצה תחום ההגדרה.
לרב יקרה בנקודות מסוג $\frac{\neq 0}{0} = \pm\infty$.

לדוגמא

• $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = x+3 = 6 \longrightarrow$ אין אסימפטוטה כי הגבול לא $\pm\infty$.

• $f(x) = \ln x \longrightarrow$ יש אסימפטוטה ב $x=0$

• $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $x > 0$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty \longrightarrow$ לכן קיימת אסימפטוטה אנכית ב $x=0$, בקצה ת"ה.

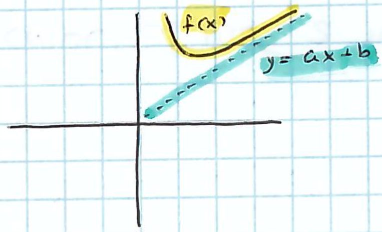
כללים

• הפונקציה <u>לעולם לא</u> חותכת את האסימפטוטה האנכית.

• אם הפונקציה מוגדרת לכל x, אין אסימפטוטה אנכית.

משופעת

מלמדת האם הפונקצ'ה מתנהגת כמו קו ישר ב ∞ או $-\infty$ (בקצוות).



הדרישה: $\forall x$: ① $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-ax-b)=0$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)\overset{!}{=}0$$

לא קשור x - ל

כי $x=\infty$ אז המכנה ממש גדול

0

$$\boxed{a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}}$$ (a חייב להיות מס' סופי).

② $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax-b)=0$

$$\boxed{b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)}$$

לסיכום: הישר $y=ax+b$ אסימפטוטה משופעת אם מתקיים:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)$$

אם a,b שניהם מספרים סופיים קיימת אסימפטוטה משופעת.

(כאשר $a=0$ האסימפטוטה נקראת גם אסימפטוטה אופקית)

דוגמא

$$y=\frac{2x^2-3x+7}{x-4}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{2x^2-3x+7}{x-4}=\left(\frac{\neq0}{0}\right)=\pm\infty$$

ולכן $x=4$ אסימפטוטה אנכית.

נבדוק האם יש אסימפטוטה משופעת. נבדוק a:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-3x+7}{x(x-4)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-3x+7}{x^2-4x}=\frac{2}{1}=2$$

נבדוק b:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2-3x+7}{x-4}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{2x^2}-3x+7-\cancel{2x^2}+8x}{x-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x+7}{x-4}=\frac{5}{1}=5$$

קיבלנו $a=2$, $b=5$ ולכן $\boxed{y=2x+5}$ אסימפטוטה משופעת.

תרגילים

- $f(x)=\dfrac{5x^3-7x^2+1}{x^2-9}$

נבדוק $x=\pm3$

$$\lim_{x\to3}\frac{5x^3-7x^2+1}{x^2-9}=\pm\infty \quad \left(\frac{\neq0}{0}\right)$$

ולכן $x=\pm3$ אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x\to-3}\frac{5x^3-7x^2+1}{x^2-9}=\pm\infty \quad \left(\frac{\neq0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^3-7x^2+1}{x(x^2-9)}=\frac{5}{1}=5$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5x^3-7x^2+1}{x^2-9}-5x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{5x^3}-7x^2+1-\cancel{5x^3}+45x}{x^2-9}=\frac{-7}{1}=-7$$

אסימפטוטה משופעת.
$\boxed{y=5x-7}$

$$\frac{8x^3-9x}{x-5}$$

נבדוק אסימפטוטה אנכית:

$$\lim_{x\to 5}\frac{8x^3-9x}{x-5}=\pm\infty \quad \left(\frac{\neq 0}{0}\right)$$

ולכן $x=5$ אסימפטוטה אנכית

נבדוק אסימפטוטה משופעת:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x^3-9x}{x(x-5)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x^3-9x}{x^2-5x}=\pm\infty$$

ולכן אין אסימפטוטה משופעת.

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$$

חקירה מלאה

ת"ה $x\neq 0$

חיתוך עם הצירים

$x=0$: $y=0$, $(0,0)$

$y=0$: $\frac{x^2}{x-1}=0 \Rightarrow x=0$, $(0,0)$

עליה ירידה

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-1x^2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$0=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$0=x^2-2x$$

$x=0$ $(0,0)$, $2=x$ $(2,4)$

(*) בטבלה מכניסים את הנקודות שהנגזרת מתאפסת ואת הנק' שהפונקציה לא מוגדרת בהן:

לא מוגדרת ב $x=1$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	3
$f'(x)$	$+$ ↗		$-$ ↘		$-$ ↘		$+$ ↗
		max $(0,0)$				min $(2,4)$	

עלייה

$x<0$, $x>2$

ירידה

$0<x<1$, $1<x<2$

קעירות, קמירות, נקודות פיתול

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{((x-1)^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2(x-1)\left[x^2-2x+1-x^2+2x\right]}{(x-1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$0=2(x-1)$$

$$\boxed{x=1}$$

הפונקציה לא מוגדרת ב $x=1$ ולכן היא לא נקודת פיתול.

x	0	1	2
$f''(x)$	$-$ ∩		$+$ ∪

קמירות: $x>1$ אין פיתול

קעירות $x<1$

אסימפטוטה אנכית

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

ולכן $\boxed{x=1}$ אסימפטוטה אנכית.

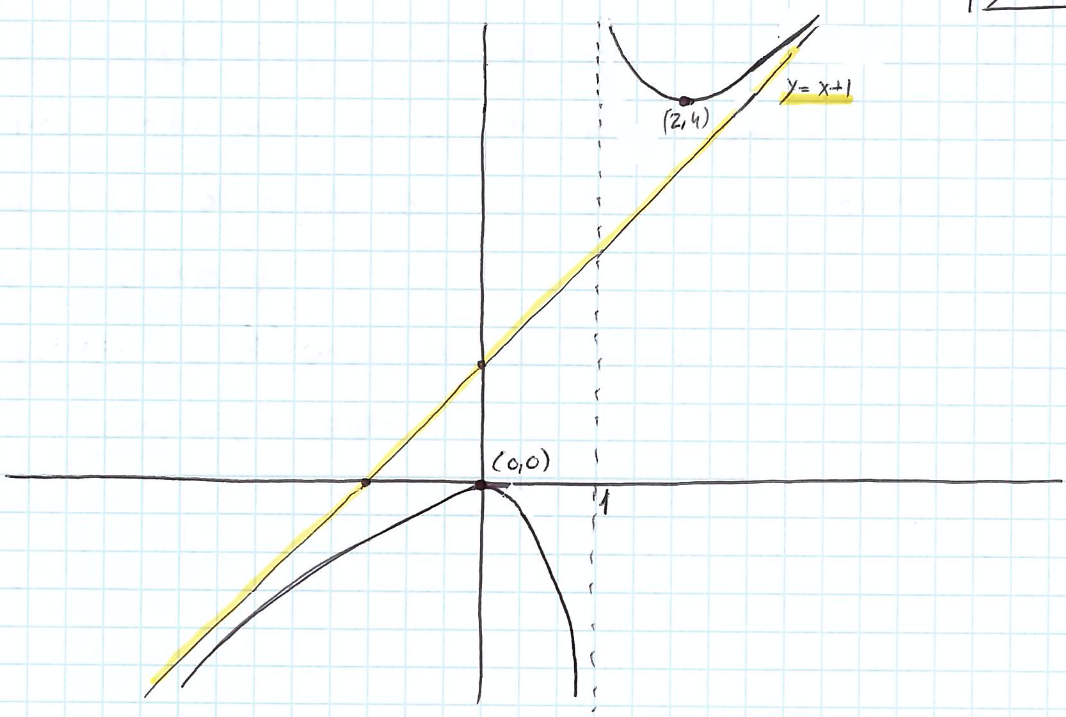
אסימפטוטה משופעת

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x)-ax) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + x}{x-1} = \frac{1}{1} = 1$$

$\boxed{y = x+1}$ אסימפטוטה משופעת

ציור



$y = x+1$

x	y	
0	1	(0,1)
-1	0	(-1,0)

בקצוות לא חוצים אסימפטוטה משופעת, אבל באמצע אפשר.

נקודות חיתוך עם הצירים
(או כל 2 נקודות) כדי לצייר
את האס' המשופעת

סיכום - חקירה מלאה

1) **ת"ה** - חיפוש נק' בהן הפונקציה לא מוגדרת (מכנה, $\log$, $\ln$, $\sqrt{}$ וכו').

2) **חיתוך עם צירים** - מציבים $x=0$ ומחפשים y, מציבים $y=0$ ומחפשים $x=0$.

3) **תחומי עליה וירידה** - גוזרים את הפונקציה, משווים את הנגזרת ל-0. הנק' שקיבלנו חשודות לקיצון. בטבלה נציב אותן ואת הנק' בהן הפונקציה לא מוגדרת ונראה את ההתנהגות של השיפוע ליד הנקודות. בסוף נרשום את התחומים בהם זה עולה ויורד ונק' קיצון.

4) **תחומי קעירות, קמירות ונק' פיתול** - נגזור את הנגזרת, ונשווה ל-0. בטבלה נציב את הנק' שקיבלנו ואת הנקודות בהן הפונקציה לא מוגדרת, ונראה את ההתנהגות של השיפוע ליד הנק'. נרשום תחומי קמירות וקעירות ונק' פיתול.

5) **אסימפטוטה אנכית** - נבדוק את הגבול של הפונקציה בנק' בהן הפונקציה לא מוגדרת. אם $\pm\infty$ אז יש שם אסימפטוטה אנכית.

6) **אסימפטוטה משופעת** - נבדוק את הגבול של הפונקציה ב $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ כך שהתוצאה תהיה סופית. זה a. אם a סופי אז נבדוק את הפונקציה $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)$ כך שהתוצאה תהיה סופית. זה b. אם b סופי אז תהיה אסימפטוטה משופעת $y=ax+b$.

7) **ציור** - מכניסים את כל הפרטים שמצאנו לציור, עם דגש על לא לחצות אסימפטוטה אנכית, ומקבילות את המשופעת.

תרגיל

$y = \frac{x^3}{x^2-1}$

ת"ה $x \neq \pm 1$

חיתוך

$x = 0$, $y = 0$ → $(0,0)$

$y = 0$: $x^3 = 0$, $x = 0$

עליה ירידה

$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) \; 2x(x^3)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2}$

$0 = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$

$0 = x^4 - 3x^2$

$0 = x^2(x^2-3)$

$x = 0$, $x = \pm\sqrt{3} = \pm 1.73$

$(0,0)$ $(1.73, 2.59)$

$(-1.73, -2.59)$

x	-2	-1.73	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1.5	1.73	2
$f'(x)$	$+$ ↗	max	$-$ ↘		$-$ ↘		$-$ ↘		$-$ ↘	min	$+$ ↗

עליה: $x < -1.73$, $x > 1.73$

ירידה: $-1.73 < x < 1.73$ $(x \neq \pm 1)$

$(0,0)$ $(-1.73, -2.59)$ max $(1.73, 2.59)$ min

קיצון קימור

$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$

$f''(x) = \frac{\overset{2x(2x^2-3)}{(4x^3-6x)}(x^2-1)^2 - 2(x^2-1)(2x)(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^4}$

$f''(x) = \frac{2x(x^2-1)\left[(2x^2-3)(x^2-1) - 2(x^4-3x^2)\right]}{(x^2-1)^4}$

$0 = \frac{2x(x^2-1)(x^2+3)}{(x^2-1)^4}$

$x = 0$, $x = \pm 1$, $x^2 = -3$ ✗

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f''(x)$	$-$ ∩		$+$ ∪		$-$ ∩		$+$ ∪

קמירות: $-1 < x < 0$, $x > 1$

קעירות: $x < -1$, $0 < x < 1$

נק' פיתול. $(0,0)$

(± 1 לא בתחום ההגדרה אז לא נק' פיתול.)

אסי' אנכית

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

לכן $\boxed{x=\pm 1}$ אס' אנכית

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0} = \pm\infty$$

אס' משופעת

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(x^2-1)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = \frac{1}{1} = 1,,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + x}{x^2-1} = 0,,$$

$y = x$ אסימפטוטה משופעת

ציור

x	y
0	0
3	3